SREDNJA ŠKOLA AMBROZA HARAČIĆA
MALI LOŠINJ
PODRUČNI ODJEL CRES

SUNČICA LUKENDA

FRAKTALI

ČUDESNE SLIKE KAOSA

SEMINARSKI RAD

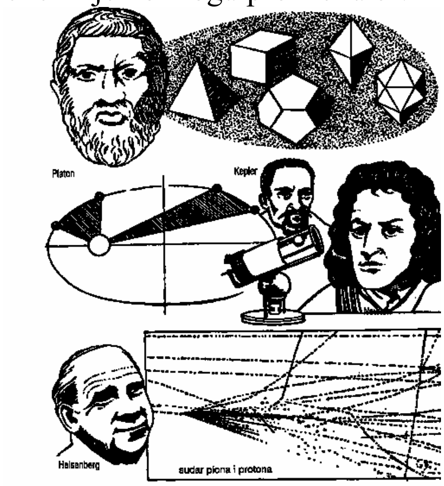
CRES, 2006.

Predgovor

Čovjek je oduvijek shvaćao koliko je važno uočavati predmete, druga živa bića i procese u prirodi zbog održanja života svoje vrste. Zaključio je kako je neke predmete već negdje primjetio i počeo ih primjenjivati u svom životu. Čovječjem oku, iako je kadar vidjeti tek mali dio spektra, omogućeno je da vidi koliko su predmeti u prirodi slični, počevši od stabla koji ima listove nalik malom drveću do velikih valova koji se razbijaju o obalu i čine male valove.

Razvojem znanosti, kako biologije, kemije, fizike, tako i mnogih grana matematike i računalstva, lakše nam je shvatiti kako svijet koji nas okružuje funkcionira i kako ta saznanja možemo primjeniti u svojoj budućnosti.

Platon je prirodu pokušao objasniti pomoću pet pravilnih čvrstih tijela. Tako smo dobili teoriju da su planine piramide, kamen da je kocka, sunce je kugla, no ubrzo se primijetilo da je takva teorija nemoguća jer je u prirodi nemoguće pronaći pravilna tijela. Planine, kamen i sunce imaju nepravilne oblike, nabore, udubljenja i izbočine. Svijetu u kojem živimo nisu prirođeni glatki rubovi i ne možemo reći da je svijet porubljen. U prirodi su glatke plohe iznimka. Pa ipak, mi smo prihvatili geometriju što opisuje oblike koji se tek rijetko mogu pronaći u stvarnome svijetu. (slika 1/4)



Euklidova geometrija opisuje idealne oblike – kružnicu, kuglu, kocku, kvadrat koji se danas mogu pronaći samo kao djelo ljudskih ruku, a ne prirode. (slika 2/5)

2000. godina nakon Platona i njegove teorije, Benoit Mandelbrot objavio je otkriće koje je promjenilo dotadašnje shvaćanje prirode u pravilnim oblicima. Uveo je pojam fraktala kao osnovne jedinice nepravilnih prirodnih oblika. Fraktalima se služi i fraktalna geometrija.

SADRŽAJ

Stranica

1. UVOD

Kako bi što bolje shvatili što su fraktali, upoznat ćemo se sa znanstvenicima koji su svojim idejama poravnali putove Mandelbrotu. Upoznat ćemo i samog Benoita Mandelbrota, okruženje u kojem je odrastao i kako je od neshvaćenog znanstvenika postao cijenjenim genijem. Ući ćemo u trag postupku izračunavanja samih fraktala, vidjeti gdje ih možemo pronaći u prirodi i kakva je njihova primjena bila u prošlom, a kakva je u današnjem vremenu.

Fraktali su sve što nas okružuje, fraktali smo i mi sami. Ako želimo naučiti nešto više o sebi, fraktali su osnovni pokazni materijal kojim se možemo služiti na putu do nas samih.

2. ŠTO SU FRAKTALI?

2.1. Podrijetlo i definicija fraktala

2.1.1. «Fractus»

Riječ «fraktal» 1975. prvi put je upotrijebio poljsko – francusko – američki matematičar Benoit Mandelbrot (r. 1924. godine) kako bi opisao oblike koji «iskazuju detalje u svim mjerilima».[1] Preuzeo ju je iz latinskog jezika, a sama riječ «fractus» sugerira na nešto slomljeno, prekinuto i rascijepljeno.

Fraktali se mogu definirati kao slike nastale ponovljenim matematičkim računom ili geometrijskom konstrukcijom. Oni su obilježeni beskonačno sitnim detaljima, beskonačnom duljinom i derivacijom.[2] Fraktal je geometrijski oblik sličan samome sebi (fraktalno prije svega znači – slično samome sebi).

2.1.2. Fraktalna geometrija

Fraktalna geometrija je geometrija nepravilnih oblika koje nalazimo u prirodi. Ona je produžetak klasične geometrije. Ne zamjenjuje ju, već je nadopunjuje i produbljuje njezine daljnje mogućnosti.

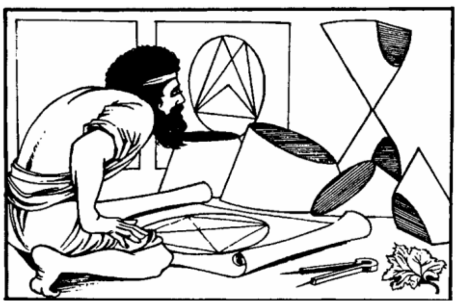
Razvojem tehnologije, a time i računala povećala se mogućnost uporabe fraktalne geometrije u detaljnom oponašanju prirodnih oblika – od morskih školjaka do galaksija. Fraktalna geometrija novi je jezik kojim se današnji matematičari mogu sporazumjevati.

Najveća želja matematičara koji se bave ovim područjem jest da će jednom fraktalna geometrija omogućiti matematičko izračunavanje oblika u prirodi, npr. oblaka s istom lakoćom kao što arhitekt može točno računski odrediti oblik kuće. Znanstvenici žele svoje znanje prenositi na nove generacije i omogućiti da se služenjem jednostavnih formula dosegnu nevjerojatni oblici i boje koje čine prirodu.

2.2. Začeci otkrivanja fraktala kroz povijest

2.2.1. Klasična geometrija

Klasična geometrija preteča je fraktalne geometrije. Postavio ju je oko 3000. g. pr. Kr. poznati matematičar Euklid iz Aleksandrije. Oblici koje je Euklid proučavao – pravci i kružnice - tako su uspješno ubjašnjavali svemir da su znanstvenici slijepo zanemarili njihova ograničenja. Sve uzorke koji nisu pristajali uz Euklidovu shemu proglašavali su «protuintuitivnima» ili čak «patološkima». (slika 3/9)



Daljnjim zanimanjem istraživača došlo je do velikog broja novih ideja koje se, naravno, nisu tek tako mogle odbaciti.

---

[1] Lesmoir – Gordon N., Rood W., Edney R.; *Fraktalna geometrija za početnike*; Zagreb, 2006., str. 7.

[2] Derivacija je nedostatak glatkoće, hrapavost.

U 19. stoljeću došlo je do otkrića nove vrste geometrije koja je «mogla opisati i one aspekte svijeta koji su na Euklidovom jednostavnom jeziku neizrecivi».[3] To otkriće možemo zahvaliti trojici matematičara: Karlo Weierstrass (1815-1897), Georg Cantor (1845-1918) i Henry Poincaré (1845-1912).

2.2.2. Otkrića Keplera, Hallya, Newtona i Leibniza

Ne smije se zaboraviti ni one koji su svojim spoznajama omogućili ovoj snažnoj trojici da dođu do novih otkrića.

U prvom redu tu se nalazi svima vrlo poznata ličnost – Johannes Kepler (1571-1630) koji je prvi shvatio da planeti opisuju eliptične orbite, a ne savršene kružnice.

Edmond Halley je naslutio da se eliptične staze mogu objasniti zakonom obrnutog kvadrata. No, u to vrijeme još nisu bila izumljena nužna sredstva za dokazivanje takve teorije.

Sir Isaac Newton (1642-1727) uveo je novu metodu zaključivanja kako bi lakše mogao objasniti kompleksna gibanja projektila i planeta. Ta se metoda temeljila na ideji infinitezimalnih veličina.[4] Pomoću nje dosegao je i svoju čuvenu teoriju opće gravitacije.

U isto vrijeme kad i Newton, Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) smislio je višu matematiku čije se formulacije i danas koriste.

2.2.3. Viša matematika i integralni račun

Višu matematiku čine: diferencijalni i integralni račun. «Diferencijalni račun daje derivaciju[5] neke varijable. U cijelom tom sustavu ključna je brzina promjene. Npr. inflacija je brzina promjene cijena: prva derivacija prosječne cijene. Ili, brzina gibanja je brzina promjene položaja tijekom vremena: prva derivacija položaja. Druga derivacija položaja, brzina promjene brzine, naziva se akceleracija (ubrzanje).»[6]

Integracija nam je uvelike potrebna kod izračunavanja fraktala. Ona je obrnuta računska operacija od diferencijacije. «Buduće vrijednosti varijable (promjenjive veličine) mogu se naći integrirenjem, ili zbrajanjem, njezine brzine promjene u svakom trenutku vremena. Sustavi kojima upravljaju prirodne sile (npr. gravitacija) mogu se analizirati pomoću brzine kojom se mijenjaju.»[7] Zbroj tih promjena određuje daljnju evoluciju tog sustava.

Iz više matematike proizašla su 3 Newtonova zakona gibanja i elektromagnetske jednadžbe Jamesa Clerka Maxwella. Njegove metode odnosile su se na glatke krivulje. «Smatralo se da se svaka krivulja s pregibima ili šiljcima može rastaviti na odvojene glatke dijelove, na koje se onda mogu primijeniti diferencijalni i integralni račun.»[8] Pitanje o krivuljama koje su se sastojale samo od izoliranih uglova nije se uopće ni postavljalo.

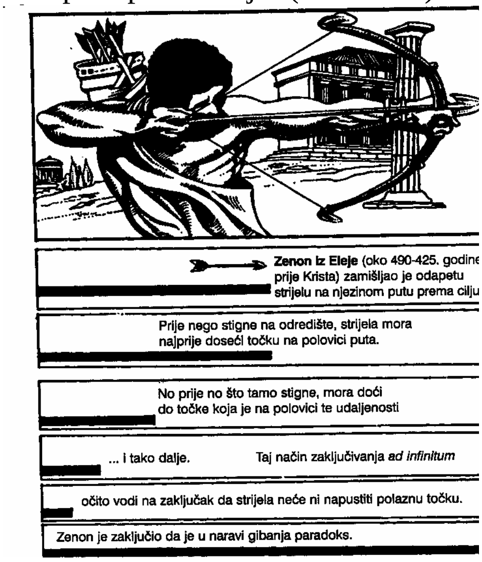
---

[3] Lesmoir – Gordon N., Rood W., Edney R.; *Fraktalna geometrija za početnike*; Zagreb, 2006., str. 9.
[4] Infinitezimalna veličina je iščezavajuće mala veličina.
[5] Derivacija je brzina promjene.
[6] Lesmoir – Gordon N., Rood W., Edney R.; *Fraktalna geometrija za početnike*; Zagreb, 2006., str. 11.
[7] Lesmoir – Gordon N., Rood W., Edney R.; *Fraktalna geometrija za početnike*; Zagreb, 2006., str. 11.
[8] Lesmoir – Gordon N., Rood W., Edney R.; *Fraktalna geometrija za početnike*; Zagreb, 2006., str. 13.

2.2.4. Beskonačna djeljivost

Tisućama godina filozofe je zbunjivalo pitanje beskonačne djeljivosti, koje je dotaknuo i sam Newton.

Zenon iz Eleje (oko 490. do 425. godine pr. Kr.) zamišljao je odapetu strijelu na njezinom putu prema cilju. (slika 4/12)



Prije nego stigne na odredište, strijela mora prvo doseći točku na polovici puta. No, prije nego stigne tamo, mora doći do točke koja je na polovici te udaljenosti, i tako dalje...

Takav način zaključivanja «ad infinitum» vodi na zaključak da strijela neće ni napustiti polaznu točku.

Tu su zagonetku odgonetnuli August Louis Cauchy i njegov učenik Karl Weierstrass uklanjanjem tih beskonačno malih veličina.

2.3. Prvi fraktal

2.3.1. Otkriće 1. matematičkog fraktala

Prvi fraktal otkriven je 1861. Otkrio ga je, već spomenuti Karl Weierstrass. Njegova potraga za apsolutnom strogošću dovela ga je do otkrića neprekinute funkcije; funkcije koja nem derivaciju, tj. do krivulje koja se sastoji samo od uglova. Ni u jednoj točki nije bilo moguće odrediti njezinu brzinu promjene.

Za znanstvenike više matematike tog doba otkriće ovakve krivulje bio je šok. «Smatralo se da je Weierstrassova funkcija iznimka, «patološki» proizvod ljudskog uma koji nije nalik ničemu u prirodi.»[9]

Tako su Weierstrass i njegov učitelj Cauchz razvili novu granu matematike zvanu analiza. Krenulo se u potragu za preciznim određenjem broja i neprekinutosti.

[9] Lesmoir – Gordon N., Rood W., Edney R.; *Fraktalna geometrija za početnike*; Zagreb, 2006., str. 14.

2.3.2. Cantor i njegov skup

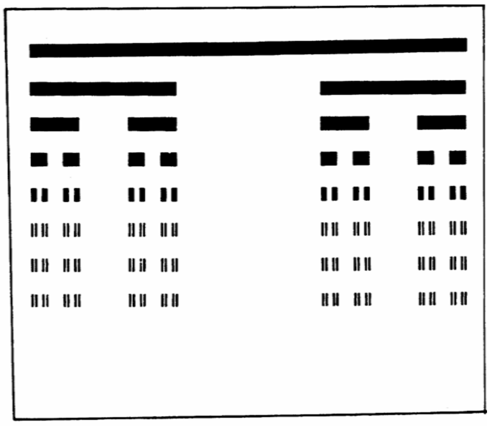
Znanstvenike je zbunjivala beskonačnost. Ona je zahtjevala gotovo dogmatski pristup kojemu matematičari nisu bili skloni.

Georg Cantor, jedan od «pionira suvremene teorije skupova»,[10] do kraja svog života istraživao je pitanje prirode kontinuuma.[11] Cantorovi su argumenti pretpostavljali postojanje različitih tipova beskonačnosti. U te argumente ubraja se i njegov dokaz da realnih brojeva ima više nego cijelih brojeva.[12]

1883. godine Cantora je njegova potraga za smislom neprekinutosti dovela do skupa[13] koji je, ustvari jedan od prvih fraktala koji su proučavani matematičkim metodama. Iako se zna da je taj skup otkrio Henry Smith, profesor geometrije u Oxfordu 1875., danas taj skup nosi naziv «Cantorov skup».

2.3.3. Izračunavanje Cantorova skupa

Određivanje Cantorova skupa vrlo je jednostavan postupak: ako se uzme dužina i ukloni se srednja trećina te dužine, preostaju dvije jednake dužine. Na isti se način ukloni srednja trećina iz svake od tih dviju dužina. Ponavljanjem postupka beskonačno mnogo puta, dobiva se Cantorov skup. (slika 5/20)

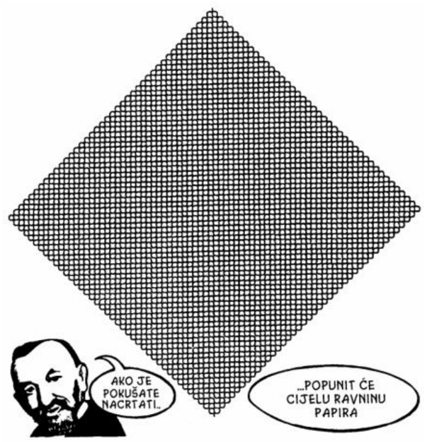


»Cantorov skup nema duljine ni unutrašnjosti. Svaki se njegov dio sastoji gotova isključivo od rupa.»[14] Iako ga čini mnoštvo razdvojenih točaka, taj je skup neprebrojiv.U njemu ima toliko točaka koliko ih ima u dužini iz koje je izvučen. «Svaka je njegova točka «gomilište» ili «granična točka».[15] To znači da se u susjedstvu te točke, koliko god mala ona bila, nalazi beskonačan broj drugih točaka skupa.To je Cantor nazvao «savršenim skupom.» «Savršeni skup jednak je skupu graničnih točaka.»[16]

[10] Lesmoir – Gordon N., Rood W., Edney R.; *Fraktalna geometrija za početnike*; Zagreb, 2006., str. 18.
[11] Kontinuum je idealan, beskonačno djeljiv prostor, koji je nužan za razumijevanje teorije kontinuirane promjene
[12] Cijelih brojeva ima beskonačno mnogo!
[13] Riječ «skup», eng. «set» ima u engleskom jeziku više različitih značenja nego ijedna druga riječ u engleskom jeziku. *Oxford English Dictionary* nabraja 126 natuknica, od kojih mnoge opisuju grupe ili zbirke objekata.
[14]Lesmoir – Gordon N., Rood W., Edney R.; *Fraktalna geometrija za početnike*; Zagreb, 2006., str. 20.
[15] Lesmoir – Gordon N., Rood W., Edney R.; *Fraktalna geometrija za početnike*; Zagreb, 2006., str. 21.
[16] Lesmoir – Gordon N., Rood W., Edney R.; *Fraktalna geometrija za početnike*; Zagreb, 2006., str. 21.

2.3.4. Peanova krivulja

Kako Cantorov skup nema ni duljine ni unutrašnjosti, matematičari su krenuli u potragu za dimenzijom. Giuseppe Peano (1858- 1932) otkrio je 1890. godine «krivulju koja ispunjava prostor.» Konstruirao je idealiziranu krivulju koja se uvija na složen način, da dotiče svaku točku u cijeloj ravnini. Dakle, krivulja je neprekinuta. (slika 6/22)



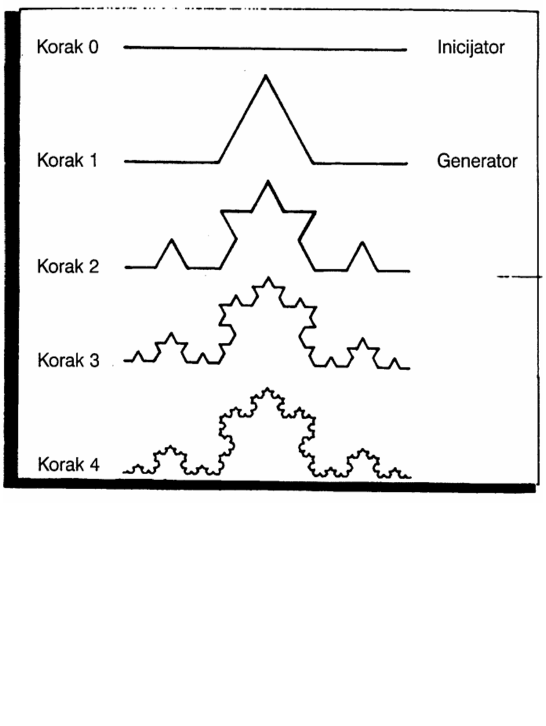
2.3.5. Samosličnost

Na prvi pogled Cantorova skupa, čini se kao da se sastoji od dvije male kopije samoga sebe. To se svojstvo zove samosličnost. «Bilo koji dio dužine i sam je dužina, istovjetna prvobitnoj dužini, u svemu, osim u faktoru umanjenja.»

Većina euklidskih oblika nema to svojstvo: luk kružnice sam za sebe nije kružnica. Stranica trokuta nije trokut. Ipak, priroda je stvorena od oblika samosličnosti: stabla, oblaci i planine slični su svojim vlastitim manjim dijelovima.

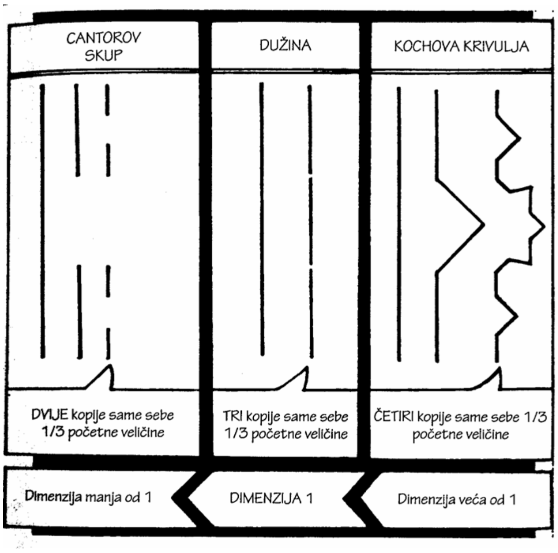
2.3.6. Kochova krivulja

1904. godine Helge von Koch (1870-1924) izmislio je krivulju snijежne pahuljice, kojom je dokazao svojstvo samosličnosti. Definirao ju je kao granicu beskonačnog niza sve jače i jače «naboranih krivulja.» Ona je beskonačno duga, unatoč tome što je smještena unutar konačne površine. Ni na jednom mjestu nije glatka niti ima tangentu. Presiječe li se krivulja pod određenim kutom, otkriva se beskonačnost Cantorova skupa. (slika 7/26)



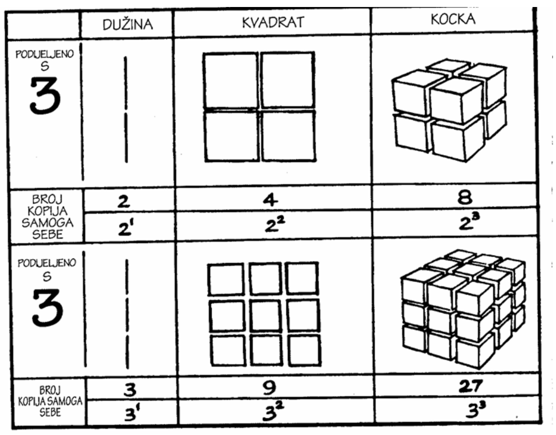
Koch nije ni slutio da se pomoću njegove krivulje mogu savršeno oponašati oblici stvarnog svijeta, poput obalne linije ili arterije.

2.3.7. Dimenzija sličnosti (slika 8/27)



Cantorov skup sadrži dvije kopije samoga sebe umanjena za jednu trećinu. Kochova krivulja sastoji se od četiri kopije same sebe umanjena za trećinu. Tako Cantorov skup leži s jedne, a Kochova krivulja s druge strane dužine. Kochova se krivulja nalazi između dužine i kvadrata. Zauzima više prostora nego dužina, ali manje nego kvadrat. Kochova krivulj leži negdje između prve i druge dimenzije. Time se može odrediti pojam dimenzije sličnosti.

2.3.8. Fraktalna dimenzija i sličnost (slika 9/28)



«Kocka, koja je trodimenzionalna, može se podijeliti u osam (dva na treću) manjih kocaka. Ako je dimenzija nekog objekta poznata, tada potencije ili eksponenti omogućuju da doznamo koliko manjih kopija sadrži taj objekt. Neki n-dimenzionalni oblik je sastavljen od m^n kopija samoga sebe umanjenih m puta.»[17]

Logaritmi su obrati eksponenata i omogućuju nam da izračunamo dimenziju objekata. Kochova krivulja sadrži Kochove krivulje umanjene na trećinu. Njezina je dimenzija log4/ log3, tj. oko 1.26.

[17] Lesmoir – Gordon N., Rood W., Edney R.; *Fraktalna geometrija za početnike*; Zagreb, 2006., str. 28.

Cantorov skup se sastoji od dva Cantorova skupa umanjena na trećinu. Njegova je dimenzija log2/log3, tj. oko 0.63.

1. dimenzija se određuje na sljedeći način: zadana je N dužina i podijeljena na n jednaka dijela, svaka je duljine r, čime je $Nr^1 = 1$.

2. dimenzija također sadrži N dužinu koja je podijeljena i svaka je dužina duljine r^2: $Nr^2 = 1$.

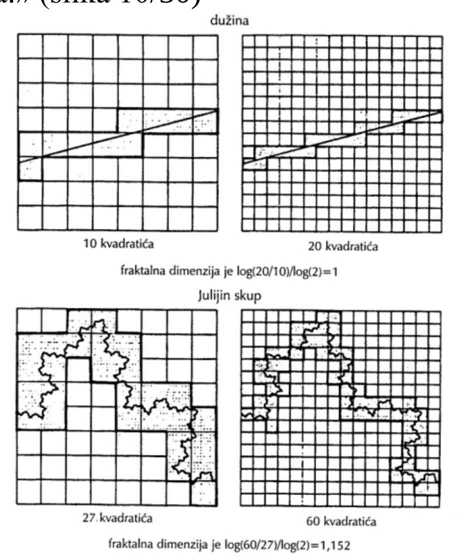
3. dimenzija definira se na sličan način, s tom razlikom da je kocka podijeljena na N kocaka i svaka je određena volumenom od r^3, čime je $Nr^3 = 1$. Time se fraktalna dimenzija može definirati kao $Nr^D = 1$.

Felix Hausdorff je 1919. godine proširio pojam dimenzije sličnosti tako da obuhvaća sve oblike, a ne samo one koji su «egzaktno samoslični.»

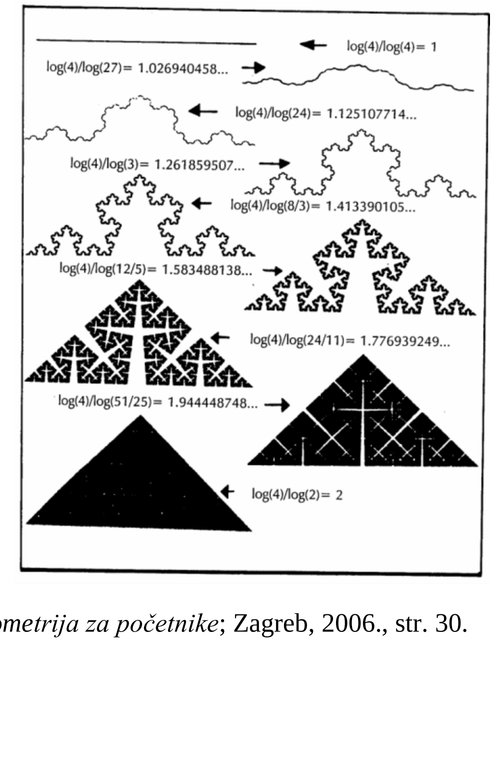
Za fraktalne oblike koji leže između dimenzija, Hausdorffova dimenzija je razlomak. Budući da razlikuje nefraktalne i fraktalne oblike, često se naziva i fraktalnom dimenzijom.

2.3.9. Mjerenje fraktalne dimenzije

Najjednostavniji način mjerenja fraktalne dimenzije krivulje jest «metoda brojanja kutija.» (slika 10/30)



Krivulja se prekrije mrežom malih kvadratića i prebroji se kroz koliko kvadratića prolazi. Postupak se ponavlja za sve manje i manje kvadratiće. «U graničnom slučaju fraktalne krivulje brzina kojom se udio ispunjenih kvadratića smanjuje daje fraktalnu dimenziju. Fraktalna dimenzija opisuje fraktalnu kompleksnost nekog objekta.»[18](slika 11/31)



Vrlo je jednostavan način izračunavanja fraktalne dimenzije. Jedinična dužina je razdijeljena na 3 jednake dužine.[19] Svaka je dugačka 1/3 jedinične dužine:

[18]Lesmoir – Gordon N., Rood W., Edney R.; *Fraktalna geometrija za početnike*; Zagreb, 2006., str. 30.
[19] Ovo nam je poznato iz Cantorova skupa.

r=1/3, N=4, tako dimenzija ovog fraktala iznosi D=In(4)/In(3)=1.26[20]

Jedinična dužina koja je razdijeljena na 4 jednake duljine, od koje svaka iznosi ¼ jedinične dužine: r=1/4, N=8. Dakle, dimenzija je D=In(8)/In(4)=1.5.

Isto vrijedi i za primjer kada je jedinična dužina razdijeljena na 3 jednake manje dužine. Svaka je dugačka 1/3 jedinične dužine (r=1/3) i svaka se zamijenjuje uzorkom od 9 manjih dužina: N=9. Dimenzija ovakvog složenijeg fraktala iznosi D=In(9)/In(3)=2. Kod posljednjeg fraktala uočava se razlika od prethodna dva fraktala. Ta se razlika očituje u tome da kada je 1/r, tada fraktal teži beskonačnosti i potpuno prekriva ravninu, D=2.

Na primjer, obalna linija Velike Britanije ima fraktalnu dimenziju približnu 1.26, slično kao i Kochova krivulja, ali nešto manja nego obris tipičnog oblaka (oko 1.35). Dimenzija 1 označava nešto glatko, dok povećanje prema broju 2 označava veću fraktalnu kompleksnost.

2.3.10. Iteracija

Iteracija je postupak koji se uzastopno ponavlja. To je ponovljena primjena nekog koraka ili pravila u algoritmu.[21] Fraktalne slike nastaju postupkom iteracije – upornim uzastopnim ponavljanjem računskog ili geometrijskog postupka.

Helge von Koch služio se iteracijom u crtanju svoje krivulje, a nije ga zaobišao ni Cantor u označavanju svoga skupa.

Naveden je klasičan primjer za iteraciju. Video kamera uživo snima ekran na kojem se prikazuje slika koju kamera snima, što proizvodi beskonačan «tunel» unutar ekrana. Svaki ekran manji je od prethodnog i njihove slike iščezavaju u jednoj točki. Ta točka se zove atraktor sustava. Ako se doda još jedan ekran, na svakom se ekranu tada vide dva ekrana, na svakom od njih opet dva ekrana, itd. Što je više ekrana, moguća je veća raznolikost. Sad ekrani nisu svi jedni unutar drugih, čime je granični skup složeniji. Takav se atraktor naziva «čudni atraktor» i može poprimiti raznolike fraktalne oblike, odlučujući i Cantorov skup.

2.3.11. Primjena iteracije

Engleski ekonomist Thomas Malthus (1766-1834) primijetio je da populacijski broj raste eksponencijalno, a proizvodnja hrane se povećava linearno. «Ekstrapolirajući u budućnost, predvidio sam da će sve širi procjep između potreba i dostupnih resursa dovesti do masovne gladi na cijelom svijetu.»[22] No, taj model ima mnogo nedostataka jer pretpostavlja konstantan porast stanovništva, a ne vodi računa o negativnom povratnom učinku populacije, tj. o tome da će se u jednom periodu broj ljudske populacije smanjiti. Malthus je zamislio idealnu situaciju, ali ona u stvarnosti nije moguća. Kada jednom populacija dosegne određenu razinu, uključuju se «kočnice» i porast se zaustavlja.

1840. godine belgijski matematičar Pierre Francois Verhulst (1804-1849) usavršio je Malthusov model. On je, naime uzeo u obzir populacijski negativan povratni učinak. Pretpostavljajući da je populacija neke vrste (npr. riba, ptica...) u jednoj godini «jednostavna funkcija»[23] populacije u prethodnoj godini, Verhulst je iznio realističniji

---

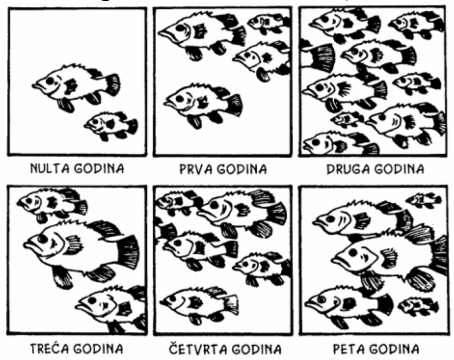
[20] In označava integral, pod tim znakom može se pronaći na džepnom računalu.

[21] Pomoću algoritama možemo izvesti složenija rješenja jednostavnijim računskim operacijama, npr. pomoću tablice množenja. Kompjuterski se programi služe algoritmima.

[22] Lesmoir – Gordon N., Rood W., Edney R.; *Fraktalna geometrija za početnike*; Zagreb, 2006., str. 52.

[23] Lesmoir – Gordon N., Rood W., Edney R.; *Fraktalna geometrija za početnike*; Zagreb, 2006., str. 53.

model rasta populacije od Malthusa. Smatrao je kako je brzina promjene proporcionalna odstupanju od maksimalne populacije i da će se populacija u pogodnim uvjetima stabilizirati i postići ravnotežu. (slika 12/53)



Ako jedne godine populacija padne ispod određene razine, u sljedećoj će godini težiti povećanju. No, ako populacija previše poraste, borba za životni prostor i izvore hrane utjecati će na njezino ponovno smanjenje. Možda bi se ovim modelom mogli poslužiti u shvaćanju svijeta i njegove povijesti. Da li je u iteraciji zapisana tajna zašto ljudi vode ratove, zašto je populacija zbog raznih bolesti varirala tokom godina? Možda je to samo slučajnost. Ali jedno je sigurno, populacija koju je činilo u početku vrlo malo jedinki, pretvorila se u mnogobrojne vrste. Ravnoteža se u prirodi još uvijek održava. Malthus i Verhulst omogućili su nam da shvatimo dijelić te misterije koja je održala i našu vrstu da preživi.

2.4. Teorija kaosa

2.4.1. Zametak teorije kaosa

Verhulst je svoju teoriju izveo pomoću jednostavne formule koja je danas poznata kao logistička jednadžba. Ona glasi: X sljedeći = rx (1-x).

1970. godine ponovno je oživjelo zanimanje za tu formulu i dovelo do nekoliko najljepših otkrića znanosti. Ta je jednadžba predstavljala zametak teorije kaosa.

Istraživanje modela s povratnim učinkom gotovo da nakon Verhulsta nije našlo svoju primjenu jer su bez elektroničnih pomagala takva izračunavanja bila prevelika i nisu nailazila na zanimanje tadašnjih znanstvenika. Sama Verhulstova formula vrlo je jednostavna, ali kako se postupak mora uvijek iznova ponavljati, na kraju postaje vrlo složena. Objašnjava se ovako: ako je x populacija u sadašnjem trenutku, tad je populacija sljedeće godine kao X sljedeći = rx sadašnji (1-x sadašnji), gdje je r neka konstanta koja se može prilagoditi populaciji koju proučavamo. Ako znanstvenike zanima dugoročno kretanje populacije nekog sustava, ta se formula ponavlja kako bi se vidjelo što će se dogoditi. Kod ovakvog izračunavanja koristi se postupak koji je već spomenut, a to je iteracija. (slika 13/55)

Primjer 1.

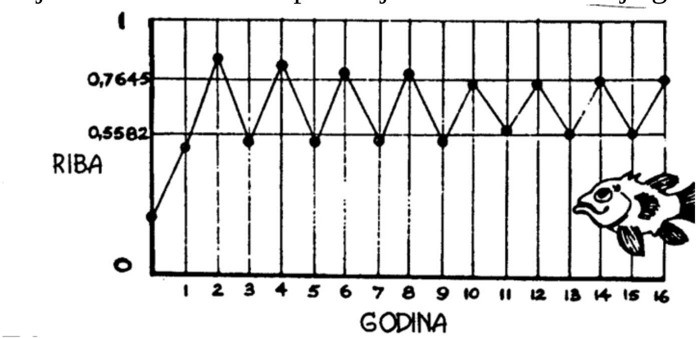
Najjednostavnije je da za x uzmemo vrijednost između 0 i 1, tako da 1 predstavlja najveću moguću naseljenost riba u ribnjaku, dok 0 znači pomor. Za r uzmemo proizvoljnu vrijednost 2.6. Pretpostavimo da je x = 0.2. Tada je 1-x = 0.8, a x (1-x) = 0.2 x 0.8 = 0.16 pomnožimo s 2.6 i dobivamo broj 0.416. Postupak se ponavlja. Započnimo s 0.416 i dobit ćemo 0.6317. Broj riba se povećava. Ako započnemo s 0.6317 dobivamo 0.6049. Naseljenost riba opada. Započnimo s 0.6049 i dobivamo 0.6214. Populacija ponovno raste.

Nakon toga, dobivamo 0.6117, 0.6176, 0.6141, 0.6162, 0.6150, 0.6156, 0.6152, 0.6155, 0.6153, 0.6154, 0.6154, 0.6154. Populacija raste i pada, ali na kraju doseže stalnu razinu.

2.4.2. Povratak Verhulstovoj jednadžbi

1970. godine ponovno je oživjelo zanimanje za Verhulstovu formulu. To je zanimanje pokazao Robert May (rođen 1936.), ekolog koji se okrenuo izračunavanju logističke jednadžbe i izazvao čuđenje kod svojih kolega znanstvenika.

May je otkrio širok raspon različitih ponašanja populacija. Najjednostavnija bila je stabilna ravnoteža. Populacija bi se ustalila na ravnotežnom broju i ostala na čvrstoj razini. No, pri povećanju osijetljivosti sustava događa se oscilacija. Prevelika naseljenost u jednoj godini dovodi do pada broja populacije sljedeće godine, što dopušta nagli rast u sljedećoj, i tako dalje. Takav se uzorak ponavlja nakon svake dvije godine. (slika 14/59)



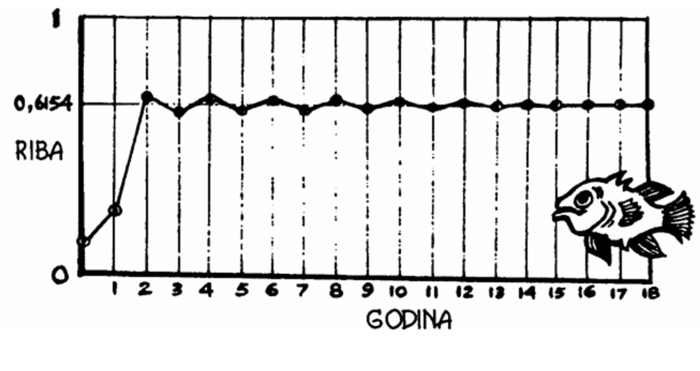
Primjer 2.

Uzmimo r = 3.1 i izračunajmo riblju populaciju. Počnimo s x = 0.2. Sljedeća je vrijednost 3.1 x 0.2 x 0.8 = 0.496. Počevši s 0.496 dobivamo 0.7750, potom 0.5407, 0.7699, 0.5492, 0.7675, 0.5531, 0.7662, 0.5532, 0.7626, 0.5612, 0.7633, 0.5600, 0.7639, 0.5592, 0.7641, 0.5587, 0.7643, 0.5585, 0.7644, 0.5582, 0.7645, 0.5582, 0.7645. Uzorak brojeva sad se stabilizira na dvije vrijednosti, a ne samo na jednoj. I ponavlja se svake godine.

Težnja da se pri određenim uvjetima, na kritičnim «bifurkacijskim točkama»[24] stabilno stanje promjeni, tj. rascjepi na dvoje, poznata je kao udvostručenje perioda. Jedan se atraktor rascjepi na dva i postaje atraktorski ciklus perioda dva. Grafički prikaz nalik je na rašlje. Daljnjim cijepanjem, koje se odvija se brže, ciklus dva perioda naglo se mijenja u period četiri, period četiri u osam, osam u šesnaest, i tako dalje.

2.4.3. Smokvino stablo

Biforkacije se zbijaju sve brže i nagomilavaju u točki poznatoj kao Feigenbaumova točka. U toj točki, sustav se kreće prema ciklusu beskonačnog perioda, nikad se ne ponavlja. Ovakva struktura poznata je pod imenom «smokvino stablo». Podvostručavanje perioda



[24] Lesmoir – Gordon N., Rood W., Edney R.; *Fraktalna geometrija za početnike*; Zagreb, 2006., str. 59.

poznato je kao «kaskada podvostručenja perioda»[25] i vodi u kaos. No, otkrilo se da kaos ima dijelove stabilnog periodičnog ponašanja. U području kaosa razabiru se tzv. prozori reda. Najveći od tih prozora predstavlja ciklus perioda 3. Prozor stabilnosti ili reda prikazuje se u Feigenbaumovom dijagramu.

Istražujući iteraciju i bifurkaciju, 1977. godine Mitchell Feigenbaum otkrio je da se omjer između uzastopnih bifurkacija ubrzano giba prema konstanti 4.669201660910... Taj se niz brojeva naziva Feigenbaumova konstanta.[26] Ona se različitim eksperimentima u fizikalnim laboratorijima pokazala točnom. Od velike je važnosti jer se kaskada s podvostručenjem perioda u matematici počela pojavljivati u stvarnim, međusobno različitim sustavima. Matematičari prije Feigenbauma mogli su samo zamišljati da će se takvo što početi uočavati u prirodi. Podvostručenje perioda je opće prirodno načelo i nalazi se npr. u povratnom pojačanju zvuka ili zvuku pokvarene slavine. Fizikalni primjeri otkriveni su u laboratorijima diljem svijeta. I gdje god se mjerila brzina uzastopnog grananja, pokusi su davali rezultat na kojem se uočavala sličnost s Feigenbaumovim brojem 4.669201660910...

2.4.4. Teorija kaosa i fraktali

1975. godine u članku pod naslovom «Period tri podrazumijeva kaos», znanstvenici Tien Yien Li i James Yorke prvi put su upotrijebili riječ kaos koja i danas kao takva stoji u znanstvenoj literaturi. To je dovelo da stvaranja nove znanosti – teorije kaosa. Ona kaže da postoji mnogo stvari koje mi jednostavno ne možemo saznati i uzrokuje da se ljudsko znanje na tome dijelu uvelike sužava.

Rezultati Lija i Yorkea pokazali su da «ciklus s periodom tri u sebi sadrži i cikluse svih drugih perioda». To je još mnogo ranije dokazao Aleksej Sarkovski, no kako je pisao na ruskom, njegovo djelo nije privuklo veću pozornost međunarodne znanstvene zajednice. Sarkovski je dokazao postojanje čarobnog niza i koji u stvarnosti pretstavlja redoslijed kojim razni periodi stižu u smokvino stablo.

Teorija kaosa ima neke vrlo pozitivne aspekte. Ona podrazumijeva da se neke vrlo velike promjene mogu izazvati uz minimalan napor. Npr. svemirski brod se može gibati po Sunčevu sustavu ako ga se tek neznatnim pokretom pokrene u pravome smjeru. Život se čovjeku može radikalno promjeniti uz pomoć neznatnog napora volje u pravome trenutku. Kako je i sam Mandelbrot to rekao, obilježje kaosa su fraktalni atraktori, a fraktali su uzorci kaosa.

---

[25] Lesmoir – Gordon N., Rood W., Edney R.; *Fraktalna geometrija za početnike*; Zagreb, 2006., str. 61.

[26] Feigenbaumova konstanta ili broj opća je univerzalna konstanta, kao i broj π (omjer opsega kružnice i njezinog promjera, iznosi 3.141592654...). Primjenjuje se u realnom svijetu kao i u kompjutorskim simulacijama.

3. OTKRIĆE FRAKTALA

3.1. Život i rad Benoita Mandelbrota

3.1.1. Prethodnici Benoita Mandelbrota

U vrijeme I. svjetskog rata, francuski matematičari Gaston Julia (1893-1978), student Henrija Poicaréa i Pierre Fatou (1878-1929) proučavali su racionalna preslikavanja[27] u kompleksnoj ravnini.[28] Julia i Fatou pažljivo su istražili proces iteracije. Njihovi su radovi ostali uglavnom nepoznati, čak i većini matematičara, jer se bez suvremene kompjutorske opreme nisu mogle dokazati njihove zamisli i teorije. Dobro im je bio poznat pojam samosličnosti. Julia je proučavao preslikavanje i tako stvorio nove pojmove. Jedan od tih pojmova jesu i repelori.[29] Granica između ploha koje skupljaju kišu sastoji se od odbojnih točaka koje guraju susjedne točke od sebe. Te su granice vrlo složene i poznate su pod nazivom «Julijini skupovi». Ni Julia ni Fatou nikada zapravo nisu vidjeli Julijin skup. Prvi pokušaj prikaza skupa pojavio se u jednom članku 1925. godine. No, ni tada skup nije bio potpuno točno prikazan. Nažalost, ti znanstvenici nikada nisu vidjeli sve čudesne oblike koje čine Julijini skupovi. Tek su nakon uvođenja suvremenih kompjutora Julijini skupovi zasjali u punom svjetlu i otkrili svoje najsitnije detalje.

Osoba koja je najzaslužnija za otkriće prikaza Julijinih skupova i samih fraktala jest Benoit Mandelbrot.

3.1.2. Benoit Mandelbrot

Benoit Mandelbrot rođen je u Varšavi 1924. godine u relativno imućnoj obitelji. Njegov otac bio je uspješan veletrgovac odjećom, a majka cijenjena zubarica. Bili su litvanski Židovi. Kad je Benoit imao 12 godina njegova je obitelj odlučila napustiti Poljsku i nastaniti se u Parizu jer je holokaust u to vrijeme već počeo. U Parizu su imali prijatelje koji su im našli smještaj i posao. Iako je ta selidba bila teška za sve, pa i za mladog Mandelbrota, imala je smisla. Benoitov stric Szolem Mandelbrot, očev mlađi brat matematičar uzeo je dječaka pod svoje okrilje. Govoreći o svojoj prošlosti, Mandelbrot se sjeća: «Upravo zahvaljujući mom stricu Szolemu, još kao djetetu mi je postalo jasno da je matematika živi organizam. Otac i stric su se, moglo bi se reći, otimali za moju dušu.» Njegov otac želio je da se Benoit u životu bavi nečim stabilnim i usmjeravao ga na inženjerstvo, dok je s druge strane stric htio da se bavi vježbanjem najapstraktnijeg dijela mozga i smatrao kako bi trebao postati matematičar. Moglo bi se reći da su obadvojica pobijedila u toj utrci jer je Mandelbrot kasnije težio spojanju apstraktnog s realnim.

---

[27] Transformacija ili ravninsko preslikavanje je pravilo kojim se polazeći od zadane točke određuje neka druga točka.

[28] Kompleksni brojevi nastaju kada postoji kvadratni korijen negativnog broja. Uvedeni su kao pomoćno sredstvo za rješavanje kvadratnih jednadžbi i za dobivanje rješenja kubnih jednadžbi. Oni iskazuju dublje uzorke stvarnosti nego što to mogu realni brojevi. Kompleksna ravnina je grafički prikaz kompleksnih brojeva na dijagramu. Takav prikaz osmislio je 1685. godine matematičar John Wallis (1616-1703). U ravnini su prikazani odnosi između imaginarnih i realnih brojeva. Kada se jednadžbe u kompleksnoj ravnini iteriraju uz pomoć kompjutora, pojavljuju se izuzetni oblici poput Mandelbrotova skupa.

[29] Repelori ili odbojnici.

Kad je 1940. godine Pariz pao pod nacističku Njemačku, obitelj je pobjelga na jug. Benoit je počeo učiti zanat za bravara. Školovao se neredovito i isprekidano. Nikad nije učio abecedu, a u tablici množenja stiago je do množenja s brojem 5. Međutim, njegov praktični odgoj otvorio mu je nova vrata u pogledu na svijet. Imao je sposobnost vidjeti oblike koji su lični u prirodi. Primijetio je da je ogoljelo drveće zimi slično ušću rijeke ili anatomskim crtežima krvožilnog sustava. Među svim oblicima, najviše ga je očarala cvjetača. Ako se sa cvjetače otkidaju sve manje i manje grančice, one do izvjesne mjere nalikuju cijeloj cvjetači.

Mandelbrotu je od malena bilo jasno da će postati matematičar. Stric Szolen pružio mu je primjer da se od matematike može i zarađivati za život. Završetkom rata, Mandelbrot se vratio u Pariz i, bez ikakve pripreme, pristupio prijemnom ispitu za upis na francusko sveučilište. Uz pomoć vlastite geometrijske intuicije uspio je prikriti nedostatke svoje naobrazbe, i položio je ispit.[30] Vrlo brzo je shvatio da ima sposobnost predočavanja «oblika» nekog matematičkog problema. Svaki oblik mogao je odmah preoblikovati, mijenjati mu simetrije i stvoriti sklad. Riješenja tih preobrazbi vodila su fizici i kemiji, no shvatio je kako nemaju svi oblici geometrijsku sličnost i kako se iza toga krije nešto mnogo veće.

Kako je u to vrijeme matematika u Francuskoj bila pod utjecajem nekolicine dogmatskih matematičara, koji su se skrivali iza pseudonima «Bourbaki»[31], Mandelbrot često u svojim istraživanjima nije bio dovoljno shvaćen. Smatralo se da su slike prolazne i neprikladne za uzvišenost čiste matematike i da bi mogle matematičare odvesti na krivi put. Mandelbrot se nije mogao pomiriti s takvim načinom razmišljanja i svim snagama se pokušavao oduprijeti njihovom snažnom utjecaju. On je htio matematiku, geometriju koja će objasniti «stvarni» svijet. Tražio je kako bi mogao matematikom opisati prirodu i njezine procese.

Oženio se, napustio Francusku i preselio se u Sjedinjene Američke Države.

Moguće je da se bez nepodnošljivog Bourbakijevog utjecaja nikada ne bi razvila fraktalna geometrija i mi bismo još dan danas čekali otkriće Mandelbrotovog skupa.

Dobio je posao u IBM-u u New Yorku. IBM mu je dao sredstva, uređaje, istraživačku ekipu te intelektualnu slobodu da istražuje bilo koje područje koje ga zanima.

Svoje znanje je crpio iz članaka koje su drugi matematičari bacali u smeće. U potrazi za starim, neuglednim časopisima Mandelbrot je naišao na istraživanje jednog ekscentričnog matematičara koji se zvao Lewis F. Richardson. Najviše ga je zainteresirao Richardsonov članak iz 1961. pod naslovom «Koliko je dugačka britanska obala?». Pokazalo se da je to, naizgled jednostavno zemljopisno pitanje dovelo do razotkrivanja osobina fraktalne geometrije. Richardson je zaključio da duljina morske obale nije dobro određena. On je svoje rezultate prikazao grafički u ovisnosti o veličini mjernoga štapa. Mandelbrot je kasnije shvatio da nagib linija na Richardsonovom dijagramu predstavlja Hausdorffovu dimenziju obalne linije. Tako je iz njegovih podatak Mandelbrot izračunao da britanska obala ima fraktalnu dimenziju oko 1.26[32]. Tako bi se Richardsonovo pitanje moglo preoblikovati: «Koliko je naborana britanska obala?». Danas na to pitanje odgovoramo pojmom fraktalne dimenzije.

Mandelbrot je sve više primjećivao uzorke koji su se ponavljali – od razine rijeke Nila do raspodjele kratera na Mjesecu. Oblici poput Cantorova skupa[33] ili Kochove

---

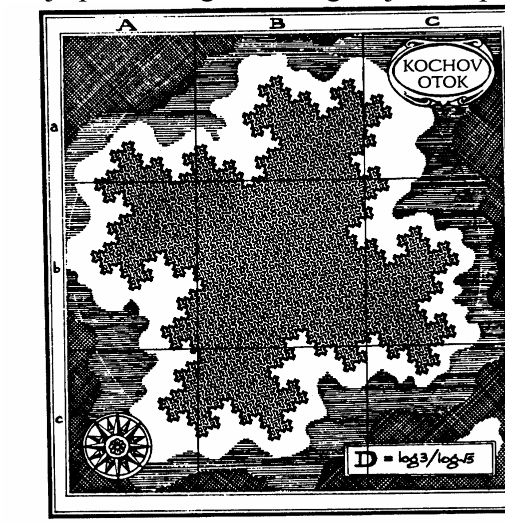
[30] U ispitu su se nalazili zadaci iz algebre i analize.

[31] «Bourbaki» su dobili naziv prema Nicolasu Bourbakiju, francuskom generalu iz 19. stoljeća. Sastajali su se potajno i imali velik utjecaj na razvoj matematike, ne samo u Francuskoj, već i u cijeloj Europi.

[32] Približno kao Kochova krivulja.

[33] Varijacije Cantorovog skupa pojavljuju se posvuda, od učestalosti riječi i slova u jeziku, do šuma u telefonskim linijama.

krivulje bili su prisutni svugdje u svijetu prirode.[34] Uočavajući da je fraktalna geometrija geometrija praktičnog, stvarnog svijeta, napravio je «fraktalni otok»(slika 15/82)



i nazvao ga «Kochov otok». Njegova je fraktalna dimenzija iznosila D = log3/log√5.

3.1.3. Praktični problem

Na samom početku svoje karijere u IBM-u, Mandelbrot je odlučio riješiti praktični problem koji je zanimao i zabrinjavao njegove poslodavce. Podaci u kompjutorima tvrtke bili su izbrisani ili izobličeni nakon iznenadnih šumova koji se nisu mogli ukloniti ni predvidjeti. Takvi su se podaci dalje prenosili s jednog kompjutora na drugi i tvrtku su stajali mnogo novca. Mandelbrot je tome problemu pristupio na jedan, sasvim nov način, tako što je na njega primijenio svoje znanje iz matematike. Njegovi su proračuni otkrivali da su te pogreške fraktalne, tj. da su samoslične na svim razinama, i da se to nastavlja do u beskonačnost. Rješenje je bio Cantorov skup. Iako IBM-ovi inženjeri nisu mogli shvatiti Mandelbrotovo rješenje, u sustav je uveden princip rada koji je poništio interferenciju i riješio tvrtku dodatnih gubitka.

3.1.4. Povratak Julijinim skupovima

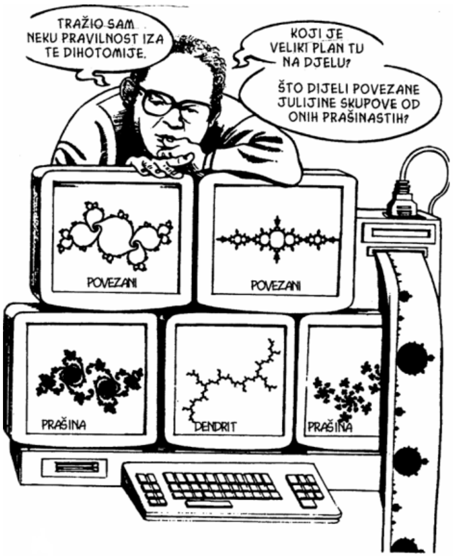
Još dok je Mandelbrot bio student, njegov ga je stric potaknuo na proučavanje članaka Julia i Fatoa iz 1917. godine. Pročitao ih je, ali nije vidio što bi mogao s time povezati. Stric je bio veoma razočaran. Trideset godina kasnije, nakon što je dobro upoznao princip rada kompjutora, vratio se tim člancima i došao do otkrića samog Julijinog skupa.

Transformacijom formule $z \rightarrow z^2 + c$, koja omogućuje preslikavanje ravnine na samu sebe,[35] Mandelbrot je, po prvi put pomoću kompjutora, vidio kako izgledaju Julijini skupovi. Njih je nazvao «samokvadrirani zmajevi».

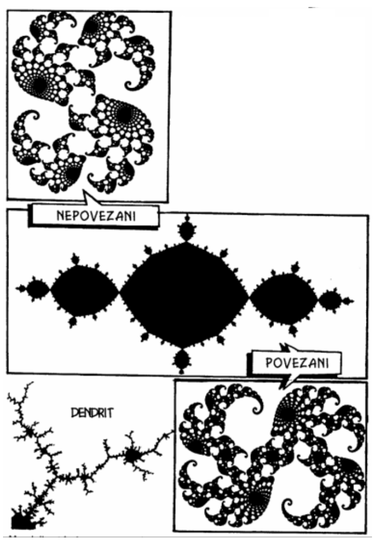
Julijini skupovi za ovo preslikavanje ovise samo o vrijednostima parametra c. Kad je c malen, oni su jednostavnije petlje, poput naboranih kružnica. Za c koji ima velike

[34] Tako je i nastala knjiga Benoita Mandelbrota «Fraktalna geometrija prirode» («The Fractal Geometry of Nature», W. H. Freeman, New York, 1977.)
[35] Preslikavanje kompleksne ravnine na samu sebe dobiva se na način da se iz jednog kompleksnog broja dobije drugi kompleksni broj.

vrijednosti, fraktali se sastoje od nebrojivo mnogo odvojenih točaka, koji su raspršeni i slični česticama prašine. (slika 16/88)



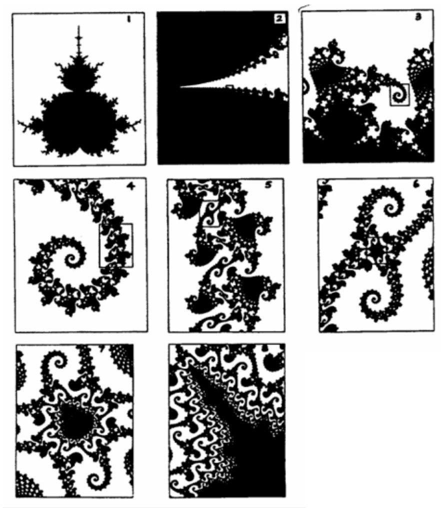
Dakle, Julijini skupovi mogu se podijeliti u dvije glavne vrste, nepovezani[36] i povezani[37]. Nepovezani se podudaraju sa svojstvima Cantorova skupa, dok povezani čine niz linija: jedna zatvorena krivulja, petlje unutar petlji koje se opet nalaze unutar drugih petlji... Na granici nepovezanih i povezanih Julijinih skupova nalaze se izrasline ili dendriti. Sastavljeni su od grana koje se neprekidno dalje granaju.[38] (slika 17/89)



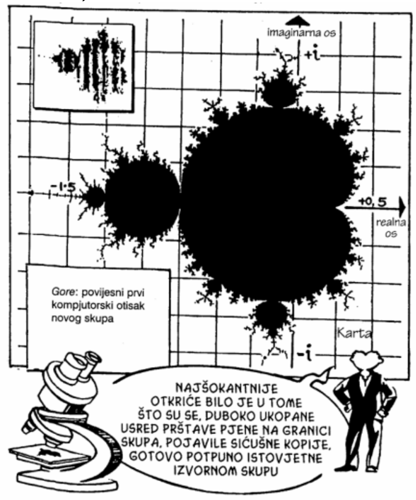
3.1.5. Otkriće Mandelbrotova skupa

1980. godine Mandelbrot je došao na ideju da izradi kartu koja bi prikazala odnos između povezanih i nepovezanih Julijinih skupova. Ako je skup na određenome mjestu bio povezan, točka na karti obojala bi se crno, dok bi se područje na kojem je bio nepovezan Julijin skup obojalo u bijelo. Ako je skup nepovezan, točka ide u beskonačnost. U suprotnom, točka ne ide u beskonačnost i skup je povezan. Tako se objašnjava Mandelbrotov skup: to je skup točaka c za koje je Julijin skup preslikavanja $z \to z^2 + c$ povezan.[39] (slika 18/92)

[36] Njihov c ima veliku vrijednost.
[37] Njihov c ima malu vrijednost.
[38] Vrlo su slabo povezani, jer kad bi se uklonila samo jedna točka, dendriti bi se rascijepili na dva djela.
[39] Ako c pripada Mandelbrotovom skupu, Julijin skup je povezan. Ako je c izvan Mandelbrotova skupa, Julijin skup je nepovezan.



Kad je prva slika počela izlaziti iz pisača, Mandelbrot i njegovi kolege mislili su da je došlo do pogreške u programu. Slika je izgledala čudno i sasvim neočekivano. «Radeći do kasno u noć u podrumu laboratorija na Harvardskom sveučilištu, Mandelbrot i njegov pomoćnik su tijekom nekoliko tjedana istraživali novootkriveni svijet.»[40] Ubacujući neprestano nove koordinate u svoj program, sve su dublje ulazili u granice novog skupa. (slika 19/91)



Mandelbrotov je skup vrlo složen i niti jedan kompjutorski program ne može odrediti pripada li mu neka točka ili ne. On je, u određenom smislu, neizračunljiv. Uvećavajući njegove dijelove, on postaje sve «zakučastiji». Misuhiro Shishikura je 1991. godine dokazao da granica Mandelbrotova skupa ima fraktalnu dimenziju 2. Unatoč tome, još nitko nije odredio potpunu površinu Mandelbrotova skupa.

[40] Lesmoir – Gordon N., Rood W., Edney R.; *Fraktalna geometrija za početnike*; Zagreb, 2006., str. 91.

4. PRIMJENA FRAKTALA

4.1. Mandelbrotov skup u prirodi

4.1.1. Matematika nabora

Mandelbrotov skup[41] prepun je bora i pregiba, kao i svijet prirode. Sve do otkrića fraktalne geometrije, svijet se nije mogao u potpunosti opisati.

Samosličnost se neprestano pojavljuje, kako u okolini, tako i kod složenijih organizama. Isti se oblici pojavljuju u mnoštvu različitih okolnosti, u različitim materijalima, koji mogu biti organski ili anorganski. Svaki dio planine sliči cijeloj planini, listić paprati izgleda kao cijela paprat, djelić krvožilnog sustava sličan je cijelom sustavu, a nalikuje stablu, riječnom ušću, potoku... Predlošci koje priroda rabi u pronalasku određenih riješenja, koja su za mnoge različite probleme jednaka[42], jesu fraktalni.

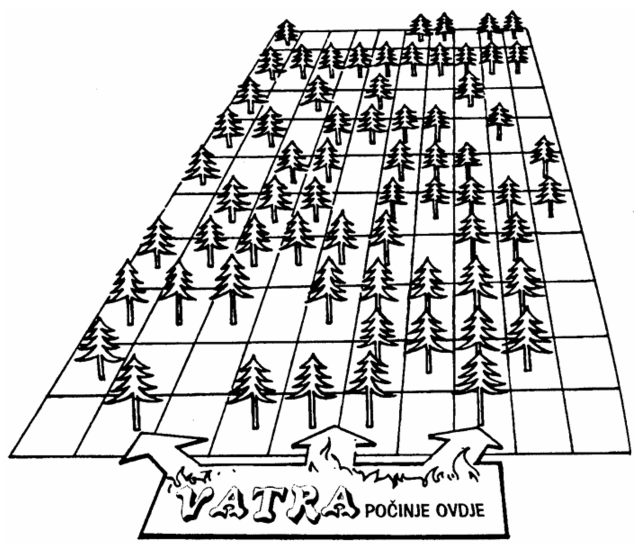
Primjer 1.

Gledajući gotografiju oblaka nemoguće je zaključiti koliko je velik. Oblaci u svim mjerilima izgledaju jednako.

Primjer 2.

Oblaci nastaju kondenzacijom sićušnih kapljica vode. Nakon što se oblikuju, u nekim svojim točkama počinju privlačiti nove sićušne kapljice. To se stalno iznova ponavlja i tako nastaju uvjeti za nastanak fraktala.

Primjer 3.



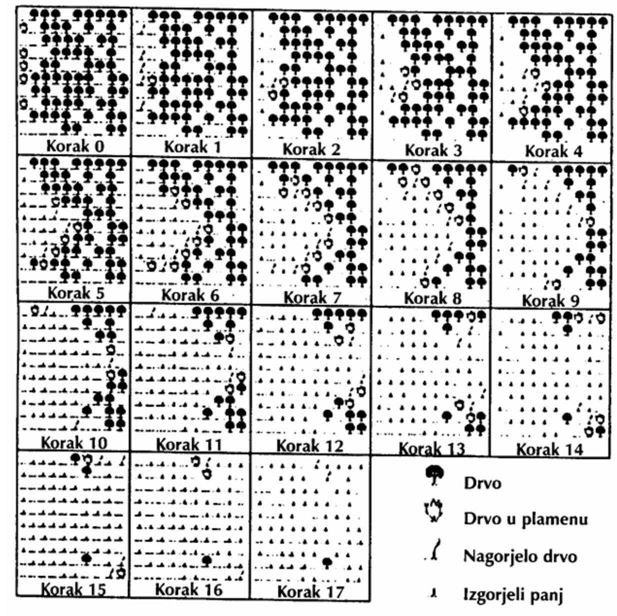
(slika 20/102)

Zamislimo nasad pravilno raspoređenog drveća. Ako se zapali samo jedan listić, cijelo se stablo zapali. Vatra se počinje širiti na susjedno drveće. Ne možemo znati koje će

[41] Mandelbrotov skup ili skup M.

[42] Kao primjerice, kako vodu s kopna crpiti u more, ili kako krv iz srca prenijeti u vrhove prstiju i opet natrag.

se drvo prvo zapaliti, ali znamo kako će se vatra dalje širiti jer ima fraktalnu granicu. Isto se načelo može primijeniti i na širenje zaraznih bolesti ili na polarnost magneta. (slika 21/103)



4.1.2. Viskozni prsti

Eksperiment, koji nosi naziv po liverpulskom profesoru Hele – Shawu, ukazuje na fraktalnu strukturu koju zovemo viskozni prsti. Voda se uštrcava kroz malu rupicu u sredinu tankog sloja ulja stiješnjenog između dviju staklenih ploča. U početku se voda širi jednoliko, ali granica između tih dviju tekućina ubrzo postane nestabilna i razlomi se u listiće koji su razgranati poput fjordova. Sve se to u obliku fraktala širi lepezasto prema van, i podsjeća na rast koralja ili biljaka. Koralji rastu prema van zahvaljujući agregaciji. To znači da se novonastali sloj tvari taloži na prethodni. Sve je to nalik na drveće i snježne pahuljice.

4.1.3. Ljudsko tijelo i fraktali

Cijelo naše tijelo stvoreno je od fraktala, dakle mi smo fraktalni. Naša pluća, krvožilni sustav, mozak nalikuju drveću. To su fraktalne tvorevine. Većina objekata u prirodi – uključujući i ljudska bića – sastoji se od mnogo različitih vrsta fraktala, međusobno isprepletenih, s pojedinim dijelovima kojima se razlikuju fraktalne dimenzije.

Primjerice, bronhijalne cjevčice imaju jednu dimenziju u prvih sedam generacija grananja, a drukčiju pri daljnjem grananju. Površina usporediva s veličinom teniskog igrališta u našim je plućima zbijena u obujam od tek nekoliko teniskih loptica. Ljudski je mozak naboran, pun pregiba i zavijutaka i pritom se višestruko presavija sam oko sebe. Zato je fraktalan.

4.2. Fraktali i istraživanja

Svi oblici koje poprima priroda slijede matematička pravila, i pri tome iskazuju hrapavost i nepravilnost. Primjerice, kompleksne površine proteina se nabiru i omataju u približno trodimenzionalnom prostoru kojemu je dimenzija 2.4. Antitijela se vežu za virus zahvaljujući poklapanju sa specifičnom fraktalnom dimenzijom površine stanice s kojom će ući u reakciju.[43]

4.2.1. Virusi i bakterije

Moleskulsi receptori na površinama svih virusa i bakterija su fraktalni. Gledajući s matematičkog gledišta, pravila fraktalne geometrije očituju se u njihovim tehnikama pronalaženja položaja, metodama kojima se služe da bi odredili kemijske procese, funcijama vezivanja za određenu stanicu...

Uz pomoć fraktalne geometrije načinjeni su modeli dinamike virusa AIDS-a.[44] Kako se imunološki sustav počinje raspadati, virus AIDS-a počinje se ponašati kaotično. Istraživanja virusa u tom stadiju su ukazala na promjene u fraktalnoj strukturi samoj HIV-a.

4.2.2. Primjena fraktalne geometrije u medicini

Površinske strukture stanica raka obiluju pregibima i naborima. Odlikuju se fraktalnim svojstvima koja se vidljivo mijenjaju tijekom različitih stadija rasta stanice raka. Fraktalna se geometrija danas koristi za rano otkrivanje stanica raka u tijelu. Uz pomoć kompjutora dobivaju se matematičke slike koje otkrivaju hoće li rak zahvatiti stanice ili ne. Ako su stanice jako fraktalne s njima nešto nije u redu i kao takve pokazuju svojstva stanica raka.

Fraktalne se strukture mogu vidjeti i pomoću magnetske rezonancije. Istraživanja i procjene su usredotočene na grube fraktalne dimenzije kako bi se uspješno mogli razlikovati zloćudni tumori dojke od onih dobroćudnih.

Koštani prijelomi se definiraju kao fraktalni. I sam izgled kostiju u kojima se nalaze mjehurići zraka, otkrivaju fraktalnu strukturu.

Otkucaji ljudskog srca čine se pravilnima i ritmičnima, ali kad se detaljnije prouči njihov vremenski redosljed, i tamo se otkriva fraktalna struktura. To je izuzetno važno u kardiologiji. Otkucaji nisu pravilni i uvijek se nailazi na sitne varijacije. Elektrokardiogram najbolje pokazuje da srce kuca nepravilno. Takva nepravilnost smanjuje mogućnost oštećenja srca. Kad bi udarci srca bili pravilni pri svakom otkucaju, srce bi doživljavalo jednak napor. Srčana se bolest može otkriti uz pomoć ekstremonog i aritmičnog fraktalnog ponašanja.

4.2.3 Praktična rješenja

U početku je fraktalna geometrija služila u praktičnim primjenama znanosti – u području nafte, minerala ili metala. Kasnije je postala osnovni oslonac za istraživanje

[43] Najnovija otkrića fraktalne geometrije usko su povezana s istraživanjem površina.

[44] Virus AIDS-a naziva se HIV. Mnogi pacijenti ostaju HIV – pozitivni i dulje od 10-ak godina prije nego što virus odluči napasti.

strukture polimera i keramičkih materijala, nuklearne reaktore, za testiranje naprezanja u naftnim bušotinama i aviona u turbulencijama. Pomoću nje mogu se odrediti fraktalne dimenzije pješčanog škriljca, oblici tektonskih rasjeda, razgranatost riječnih delta i kanalnih sustava. Pokazalo se da su fraktalni oblici najučinkovitiji za antene mobilnih telefona.

4.2.4. Primjena fraktalne geometrije u povijesti i danas

Fraktalna se geometrija upotrebljavala u vojsci za otkrivanje mina usred prirodne okoline, u pronalaženju i praćenju podmornica i brodova.

Avian Alexander sa Sveučilišta Queens u Belfastu razvio je fraktalnu bazu podataka otisaka cipela. Ta metoda u radu znanstvenika forenzičara potpuno uklanja subjektivne elemente identifikacije.

Fraktalna geometrija našla je svoju primjenu i u ekologiji: pri upravljanju okolišem i njegovom proučavanju, npr. kiselih kiša, potresa.

Pokazalo se da svemir ima fraktalnu strukturu u mjerilima do 100 milijuna svjetlosnih godina, s fraktalnom dimenzijom između 1 i 2. Kozmolozi pomoću te činjenice sve više razmatraju teoriju nastanka svemira nazvanu «veliki prasak». Tako se razvija teorija i da je svemir, zapravo, samoobnovljivi fraktal koji u beskonačnost sam iz sebe stvara nove svemire. To bi značilo da je fraktalna prostorna građa svemira i njegov vremenski razvitak.

Fraktalima i njihovom afinom transformacijom[45] koristi se i teorija evolucije živih bića.

Sateliti iz svemira desetljećima nas obavještavaju korisnim podacima o Zemlji. Potrebna im je velika rezolucija slike koju je omogućila fraktalna geometrija. Veliku ulogu imaju kompjuteri bez kojih bi sposobnost sažimanja slike, njihovog prijenosa i ponovnog proširenja kod primatelja bila nemoguća.

Fraktalnom se geometrijom, osim navedenih, bavi i ekonomija u objašnjavanju porasta i pada vrijednosti na tržištima.

4.3. Fraktali u umjetnosti

4.3.1. Fraktali u slikarstvu

Fraktali su se primjenjivali u umjetnosti i prije nego je Mandelbrot otkrio njihov naziv i oblik.

U Mahajana budizmu, fraktalna priroda stvarnosti ilustrirana je u epu Avatansaka Sutra kao metafora Indrine mreže, velikog pletiva od dragogo kamenja koje vise preko palače boga Indre. Pogledom u jedan od tih dragulja u odrazu se vide svi ostali. Prikaz takve mreže poznat je kao mandala.[46] Fraktalna primjena je i u ornamentima islamske umjetnosti, u tepisima i mozaicima; na keltskim upotrebnim predmetima, knjigama. Svijest o matematičkoj pravilnosti otkriva se u umjetnosti i arhitekturi starih Rimljana, Egipćana, u civilizacijama Azteka, Inka i Maja u Srednjoj i Južnoj Americi. Fraktale je primjenjivao i Leonardo da Vinci (1452-1519) u slici «Potop». U novije doba tu se ističu umjetnici poput Salvadora Dalija (1904-1989), M. C. Escher (1898-1972), Jackson Pollock (1912-1956) i mnogi drugi.

---

[45] Afina transformacija je postupak koji obuhvaća zakretanje, rastezanje i pomicanje slika iz prirode.

[46] Mandale su crteži fraktalnog oblika koji služe u meditacijama budista.

4.3.2. Fraktali u glazbi

Spektralna analiza glazbe, od klasične pa sve do dječjih pjesmica, pokazala je neobičnu sličnost s uzorcima poznatima iz prirode, posebno s fraktalnom razdiobom nazvanom «šum 1/f), koju nalazimo u zvuku vodopada ili valova. Sva glazba, od Bacha do Beatlesa odlikuje se šumom 1/f. Dakle, glazba je simulacija harmonije u prirodi.

5. ZAKLJUČAK

Matematički gledano, fraktali su sve što nas okružuje i sve što jesmo. Cijeli se svemir može objasniti pomoću fraktalne geometrije, koja se u vrlo kratkom vremenu razvila i objasnila do tad još nedovoljno definirane oblike u prirodi.

Fraktalna je geometrija novi matematički jezik koji se postupno kroz povijest i kroz mnoga istraživanja znanstvenika razvijao, da bi u prošlom stoljeću dostigao svoj vrhunac i razinu na kojoj se sada nalazi.

Znanstvenik koji je najzaslužniji u otkrivanju fraktala je Benoit Mandelbrot. Od svojih je prethodnika naučio biti uporan u svojim istraživanjima i težiti za malim stvarima koje čine velika otkrića. Kao što sam Mandelbrot kaže, svi oni koji i u najmanjoj mjeri dotaknu temu vezanu uz fraktale i upoznaju se s njom, sve više u prirodi primjećuju fraktalne oblike, svojstvo samosličnosti i iteracije. Bez njegova bi rada pogled na svijet bio nepotpun i mnoge stvari, koje danas posjedujemo i uzimamo zdravo za gotovo, ne bi do dan danas razumijeli, na području medicine, tehnologije i geografije, sve do umjetnosti. Fraktalna se geometrija ne bi nikad toliko razvila bez kompjutorske pomoći, no, s jedne strane, kompjutorska je tehnika doprinijela razvoju fraktalne geometrije, a s druge strane se kompjutorom još uvijek ne mogu objasniti neke fraktalne zakonitosti.

Ljudi su i prije definicije i otkrića samih fraktala u prirodi primjećivali oblike koje nisu znali odrediti matematički, ali su ih oponašali u umjetnosti – slikarstvu, arhitekturi, kiparstvu, glazbi. Sklad koji je postojao u prirodi željeli su prenijeti i u svoj život.

Posredstvom fraktala i fraktalne geometrije, matematika ulazi u naš svakodnevni život i njome možemo objasniti sve što nas okružuje.

LITERATURA

1) KNJIGE

1. Lesmoir – Gordon N., Rood W., Edney R.; *Fraktalna geometrija za početnike*; Zagreb, 2006.
2. Mandelbrot B.; *Fraktalna geometrija prirode*; W. H. Freeman, New York, 1977.

2) OSTALI IZVORI

1. *Časopis Poučak*; Profil, Zagreb, 2004., br. 18-19.