SREDNJA ŠKOLA AMBROZA HARAČIĆA

MALI LOŠINJ

PODRUČNI ODJEL CRES

GIULIA MUŠKARDIN

BRIGITA NOVOSEL

MARIJA MUŽIĆ

MARINA KUČICA

PRAVILNI POLIEDRI

SEMINARSKI RAD

CRES, 2013.

SREDNJA ŠKOLA AMBROZA HARAČIĆA

MALI LOŠINJ

PODRUČNI ODJEL CRES

PRAVILNI POLIEDRI

SEMINARSKI RAD

Predmet : Matematika

Program: Opća gimnazija

Učenice: Marina Kučica, Giulia Muškardin,

Brigita Novosel, Marija Mužić

2.razred

Mentor: Melita Chiole, prof.

CRES, travanj 2013.

SADRŽAJ

1. POČETCI GEOMETRIJE

Geometrija je, kao i druga područja matematike i prirodnih znanosti, izrasla na praktičnim problemima što ih je nametao svakodnevni ljudski život. O tome na neki način svjedoči i njeno ime, koje je grčkog podijetla i koje u slobodnijem prijevodu znači zemljomjerstvo.

Geometrijske (općenito matematičke) ideje ponikle su u veoma davna vremena. Njihovo početno oformljenje obično se dovodi u vezu sa prastarim kulturama Egipta i Babilona 20. st.pr.Kr. U egipatskim papirusima nalazi se mnoštvo matematičkih činjenica, ali ni u jednom slučaju nisu dana nikakva obrazloženja (ili neki dokaz u današnjem smislu). Iz sačuvanih dokumenata geometrija je bila čisto praktičnog oblika i to na zavidnom nivou. Poznavali su formule za površinu trokuta, pravokutnika i trapeza, površinu kruga su izračunavali s dosta velikom točnošću pomoću površine kvadrata stranice 8/9 promjera kruga (broj ∏ je aproksimiran sa 3.16), znali su i formulu za izračun volumena krnje piramide. Slično Egipćanima, i Babilonci su imali razvijenu geometriju.

Grci su geometriju, u relativno kratkom vremenu, izgradili kao pravu znanost. Prva matematička znanja preuzeli su od Egipćana. Naime, Tales iz Mileta (7.st.pr.K., jedan od sedam grčkih mudraca) je duže vremena živio u Egiptu i prenio je geometriju u Grčku. Kažu da je on dao i prvi dokaz u povijesti matematike. Dokazao je da promjer dijeli krug na dva jednaka dijela. Jednostavna i čini se oµcita tvrdnja, ali genijalnost ideje dokazivanja i jest u tome da je dokaz i takvih, jednostavnih tvrdnji, i moguć i potreban.

U razdoblju od Talesa do Euklida (3. st.pr.K.) grčki su matematičari sakupili dotadašnja znanja, pronašli nova i izoštrili svoje istraživačke metode.

Slika 1 Egipatski papirus s matematičkim tekstom

2. EUKLID I ELEMENTI

Euklid je živio od oko 330.-275.pr.Kr. za vrijeme vladavine Ptolomeja Sotera u Aleksandriji,kulturnom i znanstvenom središtu tadašnjeg svijeta.Jedan je od tri najveća grčka matematičara(Euklid,Arhimed i Apolonije-3.st.pr.Kr.) čija su djela većim dijelom i sačuvana.Bio je pristaša Platonove filozofije.Smatrqa se da je matematičko obrazovanje dobio u Ateni kod Platonovih učenika Svoju je nastavnu i znanstvenu djelatnost razvio osnivajući matematičke škole Museion u Aleksandriji.

Slika 2 Euklid

ELEMENTI

Euklidovi Elementi[1] objavljeni su oko 300. g.pr.K. Njihovo jeznačenje u tome što je to bio toliko uspješan pokušaj izlaganja elementarne geometrije na aksiomatskoj osnovi, da su oni stoljećima bili nenadmašan uzor stroge dedukcije.Sve do 18. st., a dijelom i u 19. st., oni su i osnovni udžbenik geometrije. Nije se sačuvao izvorni tekst, niti tekstovi iz Euklidovih vremena koji bi ukazivali na njih, već samo prijepisi iz kasnijih stoljeća u kojima su satavljajući unosili svoje primjedbe i poboljšanja. Na temelju postojećih nezavisnih tekstova su koncem 19. stoljeća J.L.

[1] Pored Elemenata sacuvana su Data (zbirka od 94 teorema iz Elemenata) i O dijeljenju (zadatci o dijeljenju likova), a izgubljena su Pseudaria (o pogrešnom zaključivanju u matematici), Porizmi, Čunjosječnice, O plohama, Phaenomena (o astronomiji), Optika i katoptrika (o perspektivi) i Sectio canonis (20 teorema o glazbenim intervalima).

Heiberg[2] i H. Menge[3] restaurirali originalni Euklidov tekst i danas se njihovo izdanje Elemenata smatra najsličnijim originalu. To izdanje je osnova i za hrvatski prijevod prvih šet knjiga koji je objavljen 1999. godine (Euklid, Elementi I-VI. Kruzak, Zagreb, 1999., prevela Maja Hudoletnjak Grgić, pogovor Vladimir Volenec) . Heilbergovo izdanje u engleskom prijevodu i s komentarima engleskog matematičara T.L. Heatha se najčešće koristi kada se govori o Euklidovim Elementima. U današnje vrijeme, poznavanje Elemenata nužno je kako bi se razumjela daljnja povijest matematike.

Elementi sastoje se od 13 knjiga:

- knjige 1 - 6 bave se planimetrijom,
- knjige 7 - 10 aritmetikom i teorijom brojeva u geometrijskoj formi (točnije 7 - 9 geometrijska teorija cijelih brojeva, a 10 iracionalnih brojeva),
- knjige 11 - 13 bave se stereometrijom.

Euklidovi Elementi u Europu su došli preko prijevoda s arapskog početkom 12. stoljeća u kojima su prevoditelji dodavali svoje komentare. Prijevod na latinski je napravio među prvima Herman Dalmatinac koji je najvjerojatniji prvi prijevod koji je načinio Adelard iz Batha popravio.

SADRŽAJ PRVE KNJIGE

Za pitanja geometrijske aksiometike najvažnija je prva knjiga, jer su u njoj skupljeni svi aksiomi na kojima se zasnivaju Elementi. Euklid započinje svaku knjigu definicijama onih pojmova, kojima u toj knjizi mora operirati. Ukupno u svim knjigama ima 118 definicija, a u prvoj knjizi ima ih 23. Poslije definicija Euklid uvodi postulate (5) i aksiome (9). To su tvrdnje koje se usvajaju bez dokaza, a onda se iz njih dokazuju propozicije (48).Nevodimo definicije, postulate i aksiome prema hrvatskom prijevodu.

DEFINICIJE

Slijedi prvih 7 definicija kojih je u izvornom obliku u prvoj knjizi 23.

(D-1) Točka je ono što nema djelova.

(D-2) Crta je duljina bez širine.

(D-3) Krajevi crte su točke.

(D-4) Dužina je ona crta koja jednako leži prema točkama na njoj.

---

[2] Johan Ludvig Heiberg, 1854.-1928., njemački matematičar.
[3] H. Menge, njemački lingvist.

(D-5) Ploha je ono što ima samo duljinu i širinu.

(D-6) Krajevi plohe su crte.

(D-7) Ravnina je ploha koja jednako leži prema dužinama na njoj.

POSTULATI

(P-1) Neka se postulira da se od svake točke do svake točke povlači dužina.

(P-2) I da se ograničena dužina neprekinuto prodžuje u dužini.

(P-3) I da se sa svakim središtem i udaljenošću opisuje krug.

(P-4) I da su svi pravi kutovi međusobno jednaki.

(P-5) I da ako dužina koja siječe dvije dužine čini unutarnje kutove s iste strane manjima od dva prava kuta, dvije dužine, neograničeno produžene, sastaju se s one strane na kojoj su kutovi manji od dva prava kuta.

AKSIOMI

(A-1) Stvari koje su jednake istoj stvari i međusobno su jednake.

(A-2) Ako se jednakim stvarima dodaju jednake stvari, i cjeline su jednake.

(A-3) Ako se od jednakih stvari oduzmu jednake stvari, i ostatci su jednaki.

(A-4) Stvari koje se jedna s drugom poklapaju međusobno su jednake.

(A-5) Cjelina je veća od dijela.

Nakon definicija, postulata i aksioma Euklid izlaže propozicije raspoređujući ih u red po logičkoj zavisnosti, tako da se svaka tvrdnja može dokazati na osnovu prethodnih tvrdnji, postulata i aksioma.

Euklidova propozicija (uobičajilo se navoditi i Heatov komentar, to je treći stupac) podijeljena je na šest etapa:

1. izricanje zadanoga (proteza);

2. isticanje zadanog - pretpostavke (eksteza);

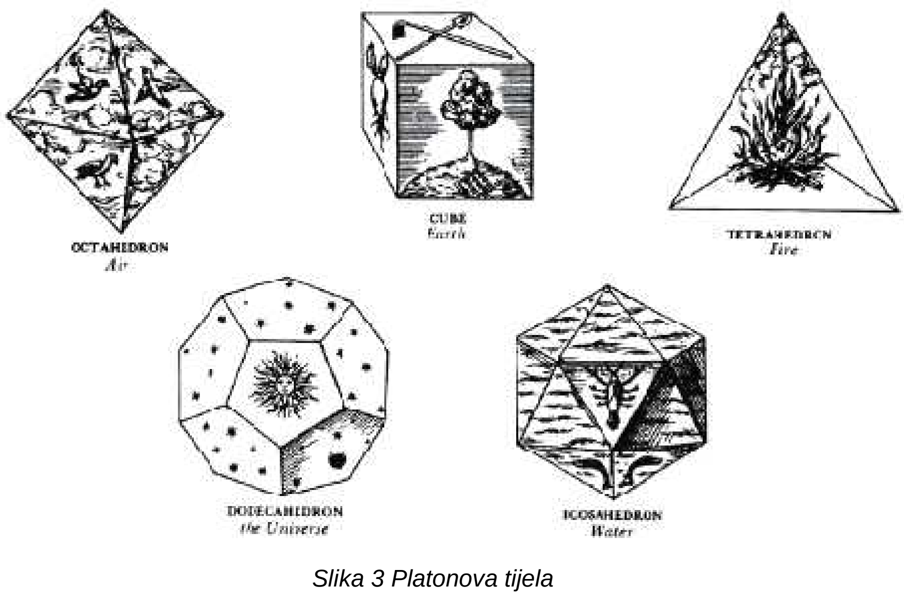
3. isticanje tvrdnje ili onog što se traµzi (diorizma);

4. konstrukcija - u konstruktivnim zadatcima to je naprosto rješenje (kateskeva);
5. dokaz (apodeiskis);

6. dokaz zaključak (simperazna) - ponovi se što je trebalo dokazati i kako se to napravi.

3.PLATONOVA TIJELA

U svom djelu *Timaeus* oko 350. g. prije Krista, grčki filozof Platon razvija svojevrsnu *atomisticku teoriju* i materijalni svijet gleda kao kombinaciju cetiriju temeljnih elemenata. A ta četiri elementa su pravilni poliedri. Tetraedar je čestica vatre. Tetraedar je oštar te lako prodire u druga tijela. Kocka je najstabilniji od pet poliedara pa je čestica zemlje oblika kocke. Prozračni oktaedar je čestica zraka, a ikosaedar, jer je "najobliji" pa stoga lako klizi, čestica je vode.



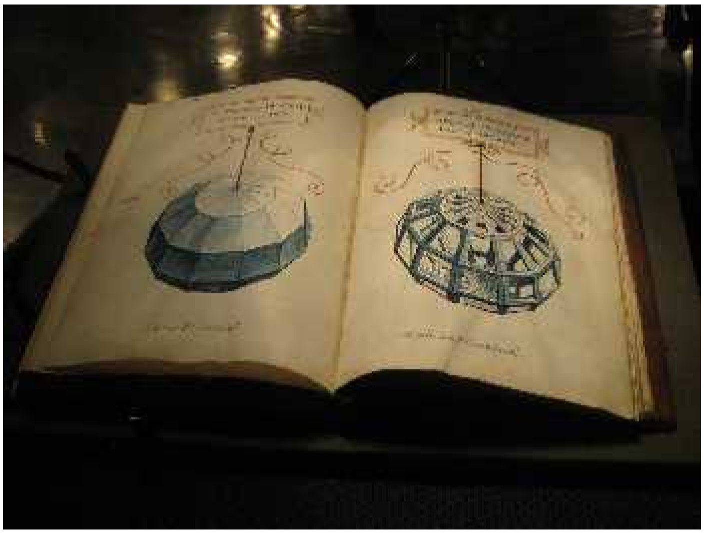
Slika 3 Platonova tijela

Tu je još i peti pravilni poliedar, dodekaedar, i u Platonovu tumačenju oblik dodekaedra ima svemir.

Ova Platonova teorija, koliko god s današnjeg stanovišta bila pomalo naivna, naišla je na podršku Johannesa Keplera (1571. – 1630.). Čak je sam Kepler to prikazaosvojim ilustracijama.

No, Keplerova su razmišljanja otišla i dalje, i on je istraživao ulogu pravilnih poliedara u svemiru. U to je vrijeme bilo poznato šest planeta; Merkur, Venera, Zemlja,Mars, Jupiter i Saturn. Pod utjecajem Kopernikova učenja, Kepler se pitao zašto ima baš šest planeta. Našao je odgovor u geometrijskom tumačenju. U djelu *Misterium cosmographicum* (1596.) izlaze harmoničan odnos planeta, čiji je međuprostor omeđen koncentričnim sferama, a tim sferama upisano je pet pravilnih poliedara.Vanjska sfera je putanja Saturna. U nju je upisana kocka, a po sferi upisanoj kocki giba se Jupiter. Ovoj je sferi upisan tetraedar, a po sferi upisanoj tetraedru giba se Mars. Slijedi dodekaedar te se na sferi upisanoj ovom tijelu nalazi putanja Zemlje. I tako redom sve do oktaedra upisanog sferi na kojoj je orbita Venere, a na sferi upisanoj oktaedru nalazi se putanja Merkura.

No, zanimljivo je kako su pravilnim poliedrima često bili zaokupljeni i umjetnici.Primjerice,vrlo su poznati crteži poliedara kojima je Leonardo da Vinci ilustrirao čuvenu knjigu De divina proportione Fra Luce Paciolija,a na slici vidimo posljednju večeru koju je salvador Dali smjestio u prostor pravilnog dodekaedra,vjerojatno pod utjecajem spomenutog Platonovog učenja.



Slika 4 Leonardovi crteži iz knjige Da divina proportione autora Fra Luce Paciolija

Slika 5 Salvador Dali - Posljednja večera

4. LEONHARD EULER

Slika 6 Leonhard Euler

Leonhard Euler (Basel, 15. travnja 1707. - Petrograd, 18. rujna 1783.), švicarski matematičar, fizičar i astronom.

Svoju znanstvenu djelatnost razvio je u Berlinu i Petrogradu, gdje je držao katedru fizike i matematike. Njegova aktivnost nije stala ni kada je oslijepio, jer je tada diktirao svoje radove. Napisao je oko 900 radova. Eulerov odbor Švicarske akademije znanosti osnovan 1907., dobio je u zadatak objaviti cjelokupno Eulerovo djelo. U 100 narednih godina objavljena su 84 toma enciklopedijskog formata. Euler je najproduktivniji matematičar u povijesti. Nakon njegove smrti, Sanktpetersburška je akademija još punih 50 godina tiskala njegove neobjavljene radove.

Matematička analiza dugo je bila središnja točka njegova rada i interesa, a svoje najznačajnije djelo Uvod u analizu beskonačnosti objavljuje 1748. U tom djelu Euler definira funkciju kao analitički izraz sastavljen nekom metodom od promjenjive vrijednosti i brojeva ili od konstantnih vrijednosti, definira polinome, trigonometrijske funkcije, eksponencijalne funkcije, te njegovu suprotnu funkciju – logaritamsku funkciju. [6]

Euler definira eksponencijalnu funkciju i na skupu kompleksnih brojeva, te je povezuje sa trigonometrijskim funkcijama. Za bilo koji realni broj vrijedi:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Iz te formule proističe čuveni Eulerov identitet, za koji mnogi smatraju, budući da povezuje pet važnih matematičkih konstanti: e, 1, i, π i 0, najljepšom jednakošću cijele matematičke znanosti:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Uz Eulerovo ime veže se čitav niz pojmova. Osim oznake f(x) za standardni zapis realne funkcije (1734.), uveo je još oznaku i za drugi korjen iz -1 (1777.), slovo e za zapis poznatog Eulerovog broja (1727.), oznaku Σ za zbrajanje (1755.), oznake Δ, sin, cos i mnoge druge. Iako mu se to pripisuje, on nije uveo oznaku π za omjer opsega i promjera kružnice, ali je dosljednom upotrebom pridonio da bude prihvaćena.

Evo nekih od formula i teorema koji dugujemo Euleru:

- Eulerova funkcija
- Eulerovi brojevi
- Eulerov pravac (ortocentar, središte opisane kružnice i težište nekog trokuta nalaze se na istom pravcu)
- Eulerova formula za homogene funkcije
- Eulerova formula zakrivljenosti plohe (kristalografija)
- Eulerov integral druge vrste ili gama-funkcija
- Eulerov integral prve vrste ili beta-funkcija
- Eulerovi kutovi

Još jedan Eulerov jednostavan, ali značajan doprinos matematici, koji se smatra temelj topologije, a to je Eulerova poliedarska formula – jednakost koja povezuje broj vrhova (V), broj bridova (B) i broj strana svakog konveknog poliedra:

$$V - B + S = 2$$

Posljedica Eulerove poliedarske formule je postojanje točno pet pravilnih poliedara. To su pravilni tetraedar, heksaedar (kocka), oktaedar, dodekaedar i ikosaedar.

5.PRAVILNI POLIEDRI

Skupove točaka u prostoru omeđene konačnim brojem poligona nazivamo poliedri. Brojevi strana, bridova i vrhova nekog poliedra nisu međusubno neovisni. Oni moraju zadovoljavati Eulerovu formulu:

V + S = B + 2,

gdje je V broj vrhova, S strana, a B bridova poliedra. Ova formula sugerira da neće biti moguće zamisliti bilo kakav poliedar s unaprijed propisanim oblikom strana. **Poliedar je pravilan ako mu sve strane činesukladni mnogokuti, a iz svakog vrha izlazi jednak broj bridova.** Pomoću Eulerove formule pokazuje se da postoji samo pet pravilnih poliedara. To su:

Pravilan tetraedar

Pravilan tetraedar pravilan je mnogokut sa stranama koje su sukladni jednakostranični rokuti. Ima četiri strane, šest (jednako dugih) briova i četiri vrha. Ime mu dolazi od grčke riječi *tetra*- četiri. Katkad je zvan i „tetrapak“ prema poznatoj kartonaži za mlijeko koja je bila u uporabi negdje od 1960. – 1980. godina. Stari hrvatski naziv za tetraedar je „četverostran“, ali se nije udomačio.

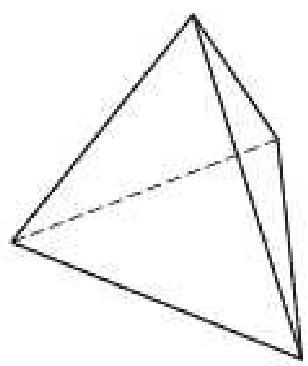
-oplošje: $O = a^2\sqrt{3}$ (≈ 1,7321 · a^2)

-volumen: $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$ (≈ 0, 1179 · a^3)

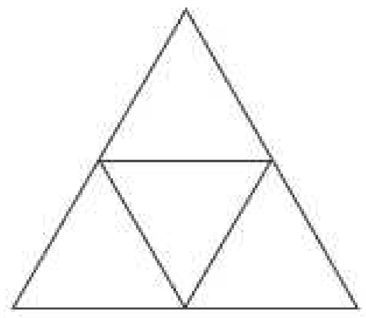
-polumjer opisane sfere: $R = \frac{a\sqrt{6}}{4}$

-polumjer upisane sfere: $r = \frac{a\sqrt{6}}{12}$

-kut između pobočki sa zajedničkim bridom: 70˚33’



Slika 7 pravilni tetraedar



Slika 8 mreža pravilnog tetraedra

Pravilan heksaedar

Pravilan heksaedar (kocka) pravilan je poliedar sa stranama koje su sukladni kvadrati. Ima šest strana, dvanaest (jednako dugih) bridova i osam vrhova. Ime mu dolazi od grčke riječi *heksa* – šest.

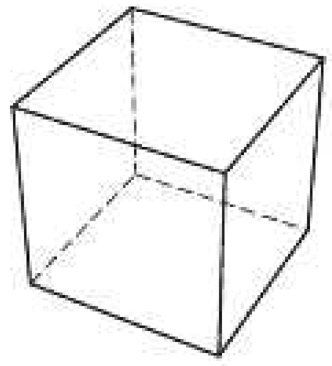
-oplošje: $O = 6a^2$

-volumen: $V = a^3$

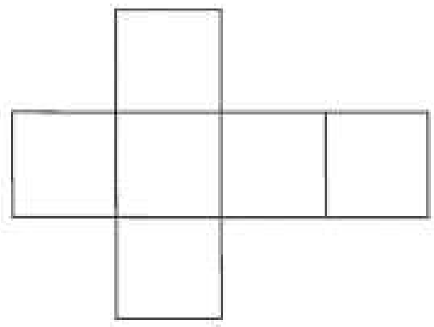
-polumjer opisane sfere: $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

-polumjer upisane sfere: $r = \frac{a}{2}$

-kut između pobočki sa zajedničkim bridom: 90˚



Slika 9 pravilan heksaedar



Slika 10 mreža pravilnog heksaedra

Pravilan oktaedar

Pravilan oktaedar pravilan je poliedar sa stranama koje su sukladni jednakostranični trokuti. Ima osam strana, dvanaest bridova (jednako dugih) i šest vrhova. Ime mu dolazi od grčke riječi *okto* – osam. Oktaedar se još može opisati i kao jednakostranična četvrostrana bipiramida, a također i kao jednakostranična linearna antiprizma.

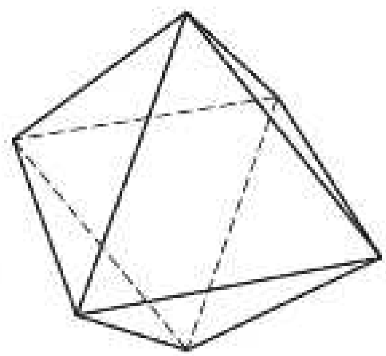
-oplošje: $O = 2a^2\sqrt{3}$ (≈ 3,4641 · a^2)

-volumen: $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$ (≈ 0,4714 · a^3)

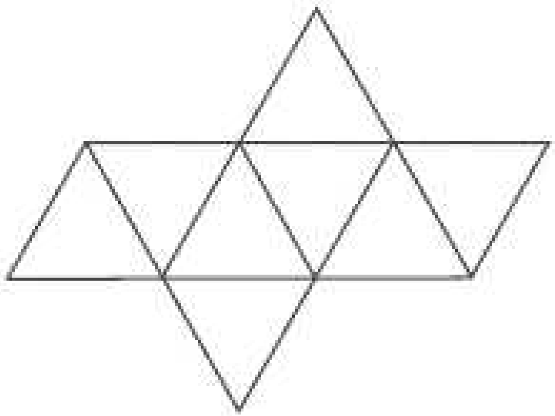
-polumjer opisane sfere: $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

-polumjer upisane sfere: $r = \frac{a\sqrt{6}}{6}$

-kut između pobočki sa zajedničkim bridom: 109°28’



Slika 11 pravilan heksaedar



Slika 12 mreža pravilnog heksaedra

Pravilan dodekaedar

Pravilan dodekaedar pravilan je poliedar sa stranama koje su sukladni pravilni peterokuti. Ima dvanaest strana, trideset(jednako dugih) bridova i dvadeset vrhova. Ime mu dolazi od grčke riječi *dodeka* – dvanaest.

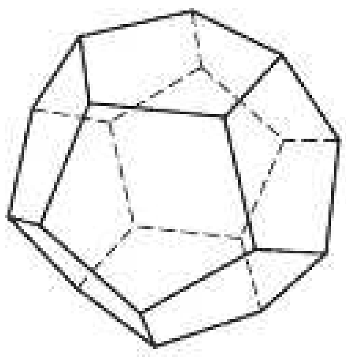
-oplošje: $O = 3a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}$ (≈ 20,6457· a^2)

-volumen: $V = \frac{a^3}{4}(15+7\sqrt{5})$ (≈ 7,6631· a^3)

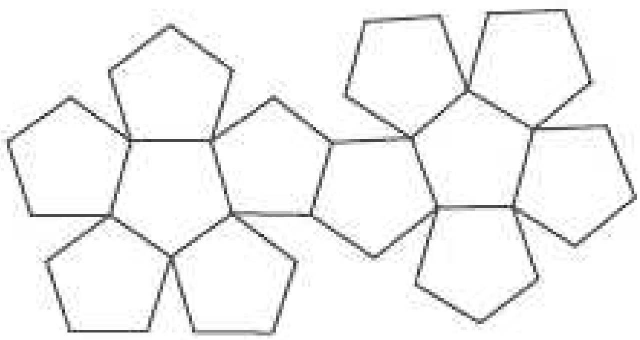
-polumjer opisane sfere: $R = \frac{a\sqrt{3}}{4}(1+\sqrt{5})$

-polumjer upisane sfere: $r = \frac{a}{20}\sqrt{10(25+11\sqrt{5})}$

-kut između pobočki sa zajedničkimbridom: 116˚34’



Slika 13 pravilan dodekaedar



Slika 14 mreža pravilnog dodekaedra

Pravilan ikosaedar

Pravilan ikosaedar pravilan je poliedar sa stranama koje su sukladni jednakostranični trokuti. Ima dvadeset strana, trideset (jednako dugih) bridova i dvanaest vrhova. Ime mu dolazi od grčke riječi *ikosi* – dvadeset.

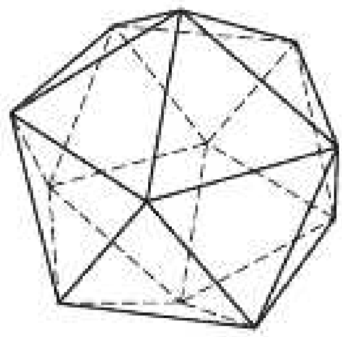
-oplošje: $O = 5a^2\sqrt{3}$ ($\approx 8,6603 \cdot a^2$)

-volumen: $V = \frac{5a^3}{12}(3+\sqrt{5})$ ($\approx 2,1817 \cdot a^3$)

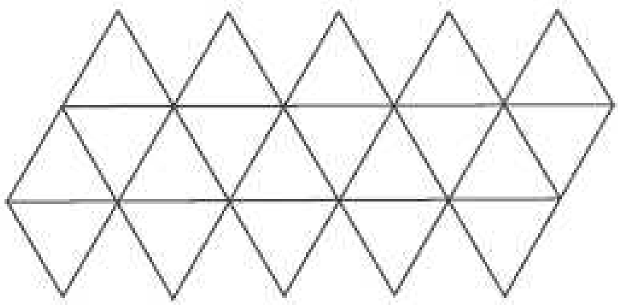
-polumjer opisane sfere: $R = \frac{a}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$

-polumjer upisane sfere: $r = \frac{a\sqrt{3}}{12}(3+\sqrt{5})$

-kut između pobočki sa zajedničkim bridom: 138°11’

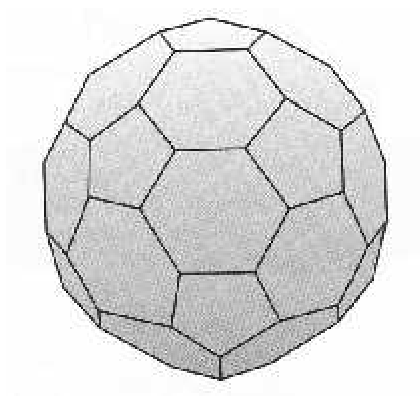


Slika 15 pravilan ikosaedar



Slika 16 mreža pravilnog ikosaedra

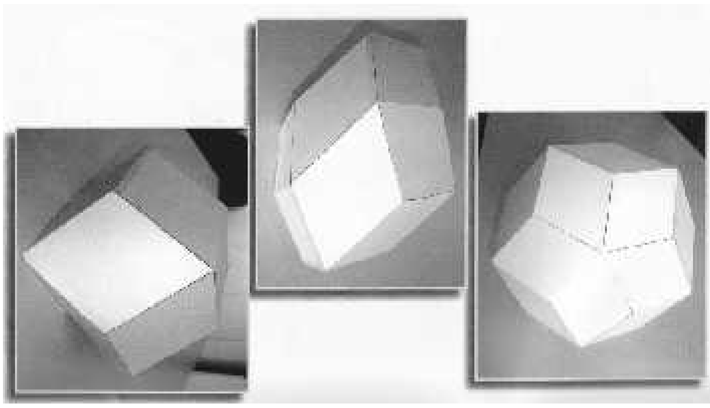
Ako od pravilnog ikozaedra „ odrežemo“ njegove vrhove, dobit ćemo model nogometne lopte! Njezino oplošje čini 20 pravilnih šesterokuta i 12 pravilnih peterokuta.



Slika 17 model nogometne lopte

U stvarnost lopta je predstavljena kao okrugla, a ne kutna kao ikosaedrovo deblo sa pravilnim kutovima. Napuhana lopta prelazi 95% volumena ograničenja kugle, ali da bi imala rubove iste vrijednosti smanjila bih se na 86,74%. Postoji kruta tvar koja bez da je napuhana zauzima 94,32% volumena kugle, ali ju je teško imenovati – zove se rombikosaedaer – i prije svega sa svoja 72 polja koja se drže zajedno 120 ušitka, jako ju je teško konstruirati. Ikosaedar točno napuhan je matematički skoro savršen rombikosaedar, koji je lako za konstruirati. Obije tvari su nesavršene i ni jedna ni druga nisu pravilan poliedar, iako su im polja pravilni poligoni oni nisu svi jednaki. Od 32 polja lopte, 20 su ih heksagoni i 12 pentagoni, dok je rombikosaedar sastavljen od 12 pentagona, 30 kvadrata i 20 trokuta. Pravilan poliedar u prostoru je ikosaedar sa 20 trokutastih polja. Zapravo deblo ikosaedra nastaje od ikosaedra, povezanih vrhovima.To je razlog da se pridjev deblo dodalo službenom imenu lopte. Kada se na nogometnom igralištu pojavi lopta, ne mislite na polja peterokuta, na volumen, na teška imena.

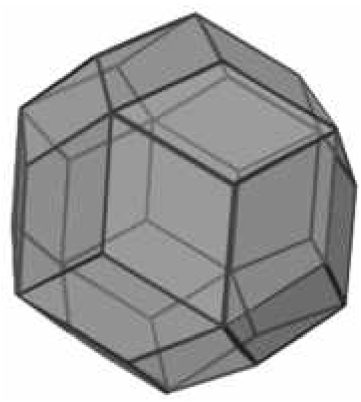
6. ROMBSKI IZOEDRI



Slika 18 modeli rombskih poliedra

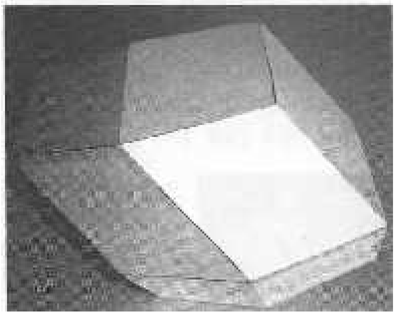
Rombski izoedri su poliedri omeđeni međusobno sukladnim rombovima. Već krajem 19. stoljeća takve je poliedre temeljito istražio E. S. Fedorov, poznati ruski geometar i kristalograf. Ustvrdio je da su svi takvi poliedi pronađeni i da su to:

- **rombski triakontaedar**, omeđen s 30 sukladnih rombova s jednakim kutom α, gdje je kut α kut kojeg tvore bilo koje dvije glavne prostorne dijagonale pravilnog ikozaedra, a jednak je otprilike 63˚26’6’’



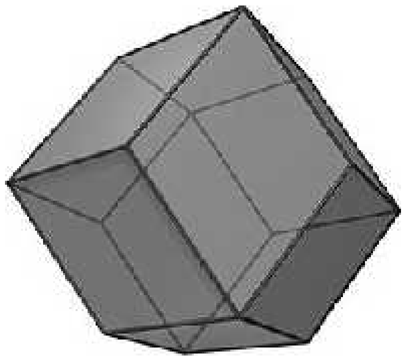
Slika 19 rombski triakonteaedar

- **rombski ikozaedar**, omeđen s 20 sukladnih rombova s jednim kutom α



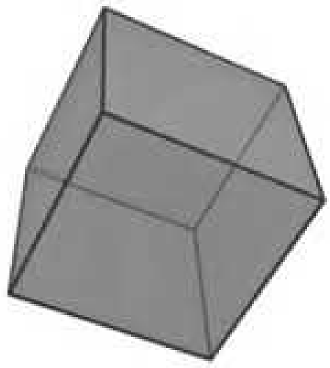
Slika 20 rombski ikozaedar

- **rombski dodekaedar**, omeđen s 12 sukladnih rombova s jednim kutom β, gdje je β kut kojeg tvore dvije prostorne dijagonale kocke, a jednak je otprilike 70˚°31'44''



Slika 21 rombski dodekaedar

- **rombski heksaedri**, omeđeni sa 6 sukladnih rombova bilo kojeg oblika, pa je među takvim poliedrima npr. i kocka



Slika 22 rombski heksaedar

Sam Fedorov je našao rombski ikozaedar, rombski heksaedri su poznati od davnih vremena, a otkriće rombskog dodekaedra i rombskog triakontaedra se najčešće pripisuje J. Kepleru. Međutim, rombski dodekaedar poznaje već L. Paciuolo stoljeće prije Keplera, a F. Lindemann je na temelju arheoloških nalaza otkrio da je rombski triakontaedar bio poznat još u helenistiškom razdoblju u Maloj Aziji.

Podatak da su gore pobrojani svi mogući rombski izoedri, preuzeli su od Fedorova mnogi drugi autori. Tek će S. Bilinski svojim radom iz 1960. godine pokazati da postoji još jedan rombski dodekaedar, metrički različit od onog već poznatog, tj. omeđen s 12 sukladnih rombova s jednim kutom α, te da su to konačno svi rombski izoedri. Ovaj rezultat profesora Bilinskog citira se u svakoj boljoj knjizi o poliedrima.

7. GEOMETRIJA VIRUSA

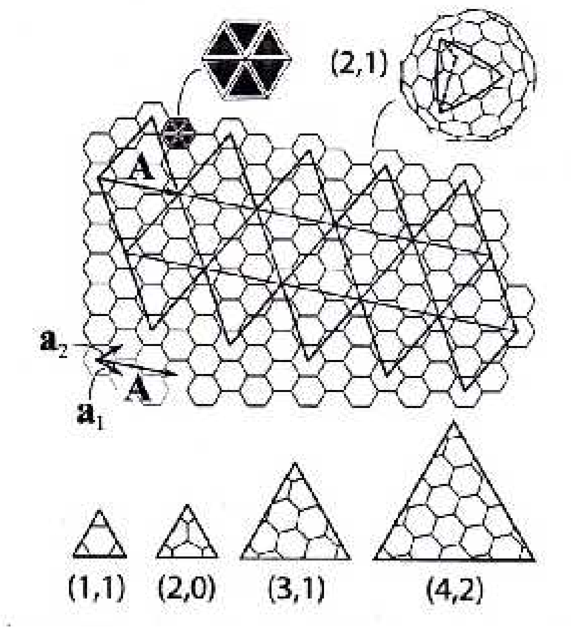
Premda su biološki sustavi rijetko u termodinamičkoj ravnoteži, i u njima često nalazimo simetriju. Posebno lijepu simetriju nalazimo kod virusa. Proteinski omotač virusa sastoji se od mnogo kopija istog proteina, a ti proteini se moraju složiti na poseban način tako da tvore zatvorenu ljusku. Viruse možemo zamisliti kao platonska tijela (tetraedar, kocku, oktaedar, dodekaedar i ikozaedar), a proteine omotača možemo zamisliti kao strane platonskih tijela (istostranične trokute u tetraedru, oktaedru i ikozaedru; kvadrate u kocki i pravilne peterokute u dodekaedru). Iako se većina virusa temelji na geometriji ikozaedra, postoje i štapićasti virusi (npr. virus mozaične bolesti duhana) i virusi kompleksnijih oblika (npr. HIV).

Ikozaedar ima dvanaest strana,što znači da bi se virus-ikozaedar, u slučaju da svakoj strani odgovara jedan protein, sastojao od dvadeset jednakih proteina. No, to nije slučaj. Ikozaedarski virusi sastoje se od

$$p = 60T$$

proteina gdje je t = 1, 3, 7, 9... takozvani triangulacijski broj virusa, poznat i kao Casper-Klugov parametar virusa. Donald Casper i Aaron Klug prvi su objasnili matematičke zakonitosti strukture virusa 1962. godine. Prema njihovom objašnjenju, koje je provjereno nizom eksperimenata, virus možemo zamisliti kao triangulirani[4] ikozaedar. Općenito, omotač virusa možemo konstruirati kao „origami“- slagalicu od šesterokutne mreže iscrtane na papiru. Postupak je prikazan na slici.

[4] triangulacija je pokrivanje određenog dijela površine konačnim brojem trokutića



Slika 23 Oblik na šesterokutnoj mreži (dvadeset jednakostraničnih trokuta čijim se izrezivanjem iz ravnine i smotavanjem u trodimenzionalni oblik dobiva nešto slično obliku prikazanom na gornjem desnom kutu slike

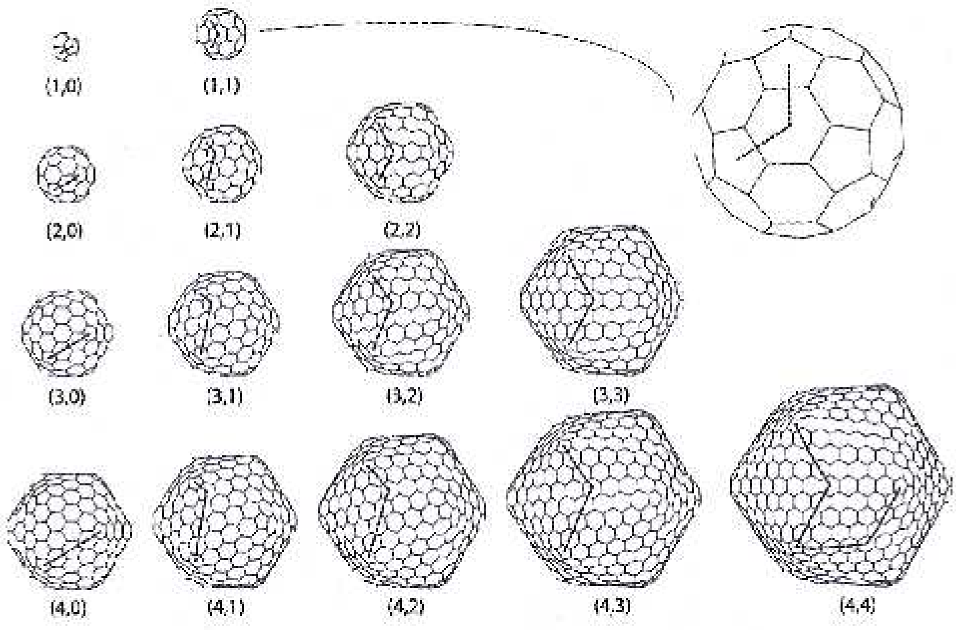
Šesterokuti na slici predstavljaju udruževine od šest trokutića-proteina (tzv. heksameri) kako je i prikazano, tako da cijelu šesterokutnu mrežu možemo lako pretvoriti u trokutastu crtajući eksplicitno po šest trokutića koji čine jedan šesterokut. Organiziranje proteina u nakupine po šest nije samo konceptualno nego su mnogi eksperimenti pokazali da je proteinski heksametar zbilja posebno stabilan.
Narav heksagulacije[5] može se opisati s dva cijela broja koji opisuju vektor A na slici. Naime, vektor A koji spaja središta dvaju šesterokuta može se zapisati u bazi vektora a_1 i a_2 tako da je

$$A = ha_1 + ka_2$$

gdje su h i k negativni cijeli brojevi. Casper-Klugov broj virusa dan je formulom:

$$T = h^2 + hk + k^2$$

[5] heksagulacija je pokrivanje dijela površine šesterokutima



Slika 24 Galerija pojednostavljenih virusa različitih h i k brojeva kako je naznačeno. Baš kao i pravi virusi, prikazani manji modelni virusi su sferični, dok veći postaju sve sličniji ikozaedru.

8. LITERATURA:

- Branimir Dakić, Neven Elezović: Matematika 2 (2.dio)
- Matematičko fizički list, godina LXI 2010. / 2011. 3 / 243
- Matematičko fizički list, godina LIX 2008. / 2009. 3 / 235
- Matematičko fizički list, godina XL 2009. / 2010. 1/237
- Matematičko fizički list, godina LIX 2008./2009. 4/236
- Matematičko fizički list, godina LIV,2003.-2004. 4/216
- Ivica Gusić,Matematički riječnik, Zagreb 1995
- http://hr.wikipedia.org/wiki/Elementi_%28Euklid%29
- http://hr.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler
- http://hr.wikipedia.org/wiki/Poliedar
- http://www.grad.hr/nastava/geometrija/ng/tijela/poli.pdf
- Euklid: Elementi, prva knjiga