Srednja škola Ambroza Haračića Mali Lošinj
Područni odjel u Cresu

Maturalni rad

Pravilni poliedri

Učenica Marina Kremenić
Mentorica: Melita Chiole, prof.

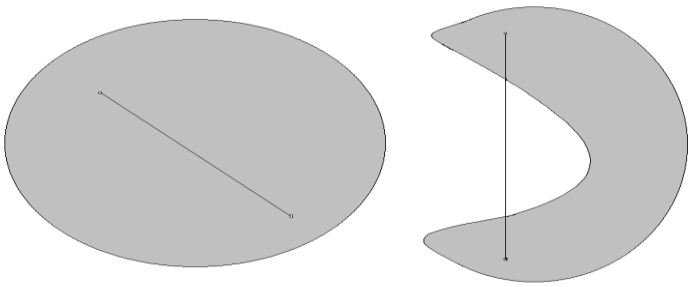
Cres, svibanj 2003.

Sadržaj:

1. Konveksni skupovi

1.1. Konveksni skupovi

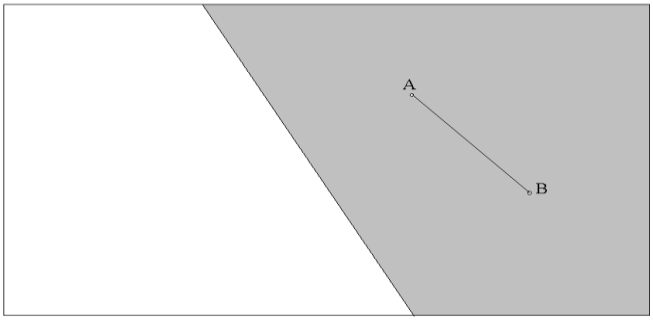
Za skup $S \subseteq E$ kažemo da je konveksan ako on zajedno s bilo kojim dvjema svojim točkama sadrži i njihovu pravocrtnu spojnicu, tj. dužinu.
Drugim riječima, skup $S \subseteq E$ je konveksan ako ima svojstvo: kada god su točke A, B elementi skupa S, onda je dužina AB podskup skupa S.
Prazan skup i skup koji se sastoji od jedne točke također smatramo konveksnim.



Slika 1.1. Konveksan skup (lijevo) i skup koji nije konveksan (desno)

1.2. Konveksni skupovi u ravnini

Jedan je od najjednostavnijih konveksnih skupova **poluravnina**. To je dio ravnine kojem je granica pravac.

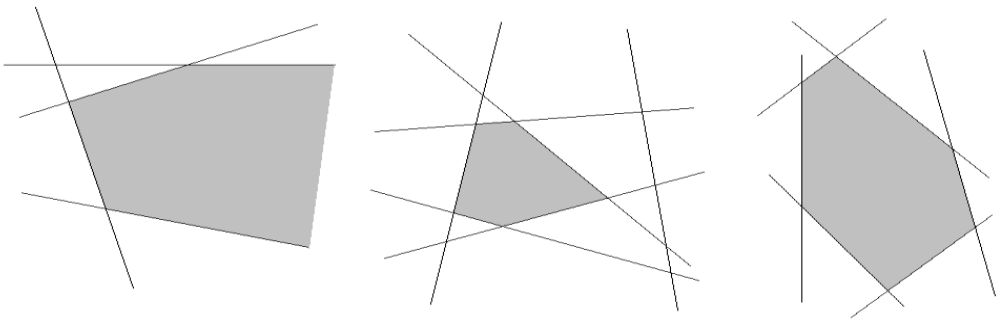


Slika 1.2. Pravac u ravnini određuje dvije poluravnine. Svaka je poluravnina konveksan skup.

Presjek konveksnih skupova konveksni je skup. Naime, ako su S1 i S2 konveksni, tad iz A, B $\in$ S1 $\cap$ S2 slijedi AB $\subset$ S1 (jer je S1 konveksan) i AB $\subset$ S2 (jer je S2 konveksan), pa je AB $\subset$ S1 $\cap$ S2 ; dakle, presjek je konveksan skup.

Potpuno istim dokazom možemo potkrijepiti činjenicu da je i presjek nekoliko konveksnih skupova konveksan skup.

Što možemo dobiti kao presjek konačno mnogo poluravnina ? Neke mogućnosti vidimo na slici 1.3. Primijetimo da se na ovaj način mogu dobiti omeđeni i neomeđeni skupovi. Omeđeni su skupovi uvijek mnogokuti - njihov se rub sastoji od dijelova pravaca.

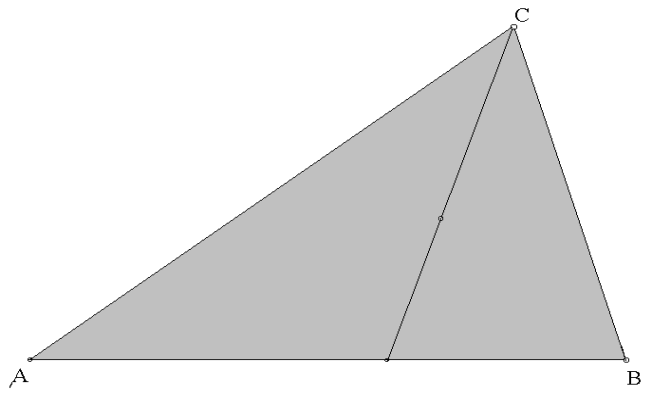


Slika 1.3. Presjekom poluravnina dobivaju se skupovi poput ovih na slici.

Svaki se konveksni mnogokut može dobiti kao presjek poluravnina. Ako on ima *n* vrhova (i stranica), tad je potrebno uzeti presjek *n* poluravnina. Tako se, na primjer, trokut može dobiti kao presjek triju poluravnina.

* * *

Ako si zadamo tri nekolinearne točke A, B i C u ravnini i odredimo najmanji konveksan skup koji ih sadrži, otkrit ćemo da je taj skup upravo trokut.



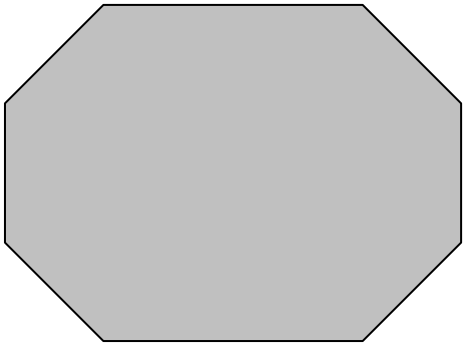
Slika 1.4. Najmanji je konveksan skup koji sadrži tri zadane nekolinearne točke trokut. Naime, on mora sadržavati spojnice tih točaka kao i spojnicu jedne točke s točkama na spojnici drugih dviju.

Ista se situacija ponavlja i za skup od konačno mnogo točaka.

<u>Konveksan mnogokut</u>

Najmanji konveksan skup koji sadrži konačno mnogo točaka koje nisu kolinearne[1] konveksan je mnogokut. Vrhovi su mnogokuta neke od tih točaka (moguće je da neka od zadanih točka bude na stranici ili u unutrašnjosti mnogokuta).

[1] Kolinearnost – odnos među točkoma ili među vektorima (tri točke u ravnini ili u prostoru su kolinearne ako se nalaze na jednom pravcu).



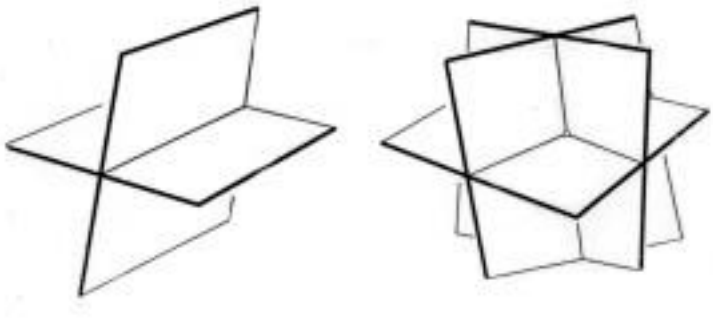
Slika 1.5. Najmanji konveksan skup koji sadrži konačno mnogo nekolinearnih točaka ravnine konveksni je mnogokut.

2. Poluprostori i poliedri

2.1. Poluprostori. Konveksni skupovi u prostoru

Za konveksne skupove u prostoru vrijede slična svojstva koja imaju skupovi u ravnini. Tako je, na primjer, presjek konveksnih skupova ponovno konveksan skup.

Osnovni je konveksan skup u prostoru **poluprostor**. To je skup svih točaka koji leže "s jedne strane" ravnine.



Slika 2.1. Dvije ravnine dijele prostor na četiri dijela. Tri ravnine koje se sijeku u točki dijele prostor na osam dijelova.

Presjek je poluprostora ponovno konveksan skup. Dvije ravnine koje se sijeku dijele prostor na četiri dijela. Dvije paralelne ravnine (koje nisu istovjetne) dijele prostor na tri dijela. Dva su među njima poluprostori, a treći je dio sloj. Tri ravnine koje se sijeku u jednoj točki dijele prostor na osam dijelova. Ovi su skupovi neomeđeni. Moramo uzeti najmanje četiri ravnine da bismo dobili omeđen skup kao presjek poluprostora.

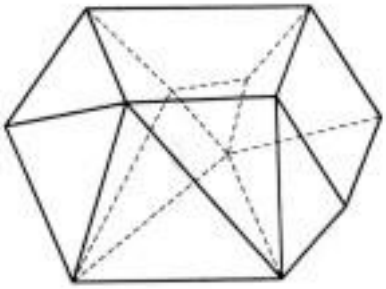
Poliedar je konveksan skup prostora kojega se rub sastoji od konačno poligona. Pri tome je svaka stranica rubnog poligona stranica još jednoga rubnog poligona. Ako stranice dvaju rubnih poligona nisu iste, onda one imaju zajedničku samo jednu točku ili su disjunktne.

Konveksan poliedar

Konveksan poliedar omeđen je skup u prostoru dobiven kao presjek poluprostora.

Pritom isključujemo slučajeve degeneracije koji se mogu javiti ako se neke ravnine koje određuju poluprostore podudaraju.

Kako izgleda konveksan poliedar? Opisujemo ga pomoću njegovih elemenata: strana, bridova i vrhova.



Slika 2.2. Konveksan poliedar. Općenito, njegove strane mogu biti mnogokuti različitih oblika.

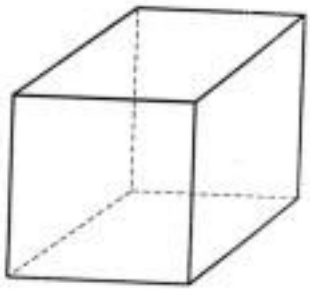
Elementi poliedra

Strana poliedra je mnogokut. Ona je dio presječnih ravnina pomoću kojih je poliedar nastao, a koji pripada poliedru.

Brid je dio poliedra u kojem se sastaju dvije strane.

Vrh je krajnja točka brida. To je zajednička točka triju ili više strana.

Strane su poliedra zaista konveksni mnogokuti jer ih možemo zamisliti kao dio jedne ravnine koji odsijecaju preostale ravnine. Tako je, na primjer, strana kocke dio ravnine koji odsijecaju četiri od preostalih pet ravnina.



Slika 2.3. Kocka je primjer jednostavnog poliedra. Dobiva se kao presjek šest poluprostora i ima šest strana (prednju, stražnju, donju, gornju, lijevu, desnu). Po dvije se strane sastaju u dvanaest bridova, a po tri strane u jednom od osam vrhova. Ravnine koje određuju strane

kocke u parovima su paralelne i jednako udaljene. Također svake su dvije susjedne strane okomite.

Poliedar možemo opisati i na drugi način.

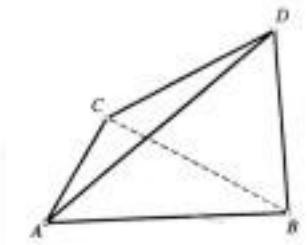
Najmanji konveksan skup koji sadrži vrhove kocke upravo je ta kocka. Naime, takav skup mora sadržavati bridove (to su spojnice točaka), mora sadržavati strane (to su spojnice točaka s bridova) i mora sadržavati cjelokupnu kocku jer se svaka njezina točka nalazi na spojnici dviju točaka sa strana kocke.

Konveksni poliedri određeni skupom točaka

Ako je zadan konačan skup točaka u prostoru koje nisu komplanarne[2], onda je najmanji konveksni skup koji sadrži te točke konveksni poliedar. Vrhovi su poliedra neke od zadanih točaka (moguće je da neka od njih leži na bridu, strani ili unutar poliedra).

* * *

Najmanji konveksan skup koji sadrži četiri nekomplanarne točke nazivamo tetraedrom. Točke A, B, C, D njegovi su vrhovi. Tetraedar ima četiri strane, šest bridova i četiri vrha.



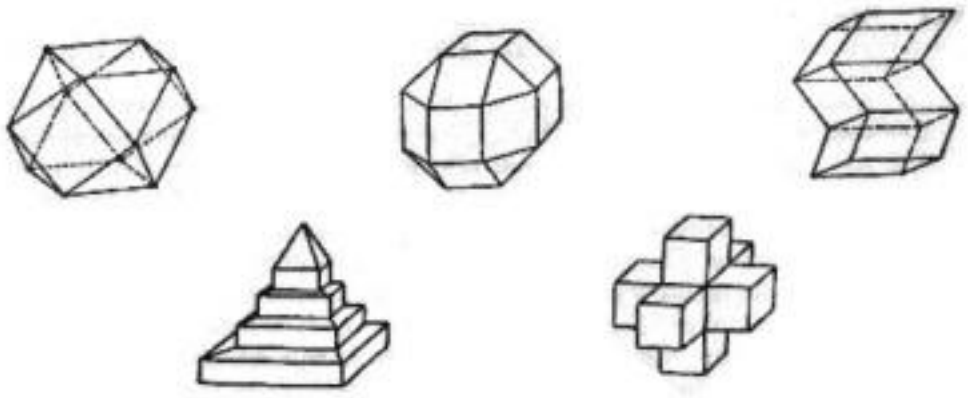
Slika 2.4. Tetraedar je najmanji konveksan skup koji sadrži četiri zadane točke. Možemo ga dobiti i kao presjek četiri poluprostora koja su određena s po tri od četiri njegova vrha.

[2] Komplanarnost – geometrijski pojam; točke su komplanarne ako se nalaze u jednoj ravnini.

2.2 Vrste poliedara

Za preciznu definiciju poliedra moramo se prvo upoznati s nekim osnovnim pojmovima iz topologije.[3] Podskup $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{R}^3$ [(4)] je otvoren, ako zajedno sa svakom točkom sadrži i neku kuglu oko te točke. **Zatvoreni** skup je komplement otvorenoga. Ekvivalentno, skup je zatvoren ako sadrži sve svoje rubne točke. **Rubna točka** skupa $S \subseteq R^3$ je točka sa svojstvom da svaka kugla s centrom u toj točki siječe S i komplement R^3 /S. Skup svih rubnih točaka od S se zove **rub** od S i označava sa ∂S. **Unutrašnjost** ili **interior** (Int S) skupa S je najveći otvoreni skup koji je sadržan u S. Skup $S \subset R^3$ je **omeđen** ako je sadržan u nekoj kugli. **Kompaktan skup** u R^3 je onaj koji je omeđen i zatvoren. Skup $S \subseteq R^3$ je **lukovima povezan**, ako za svake dvije točke u S postoji luk sadržan u S čiji je početak u jednoj, a kraj u drugoj točki. **Poliedar** je tijelo čiji je interior povezan. Rub mu je povezan skup koji se sastoji od konačno mnogo poligona, pri čemu se svaka dva od tih poligona ili ne sijeku ili imaju samo jedan zajednički vrh ili samo jednu zajedničku stranicu. Svaka stranica nekog od tih poligona je zajednička stranica točno dvaju od tih poligona. Unija svih tih poligona zove se **rubna ploha** ili **rub poliedra.**

Primjer: nekoliko poliedara

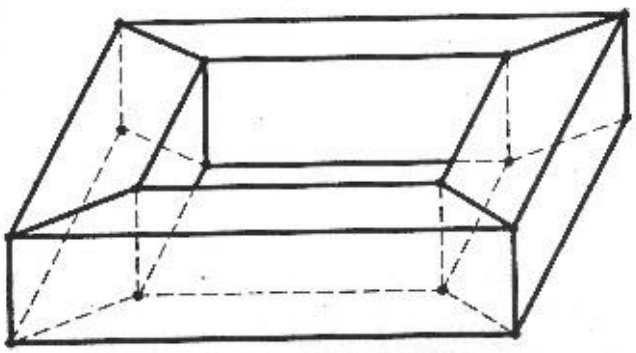


[3] Topologija – grana matematike koja proučava svojstva prostora vrlo općenita karaktera i neprekidne transformacije koje preslikavaju jedan prostor u drugi pridružujući svakoj točki prvoga prostora jednu točku drugoga prostora, tako da se ne naruši odnos "blizine" točaka u prostoru.

[(4)] U – unija skupova, R^3 - realni prostor

Svaki se poligon rubne plohe poliedra zove **strana poliedra**, stranica svakog od tih poligona zove se **brid poliedra**, a vrh svakog od tih poligona zove se **vrh poliedra**.

Primjer: "poliedarski torus"- ima 16 vrhova, 32 brida i 16 strana.



Poliedar čija je rubna ploha homeomorfna sferi zove se **jednostavan poliedar** a njegova rubna ploha **poliedarska sfera.** Za jednostavne poliedre vrijedi prostorni analogon Jordanovog teorema.

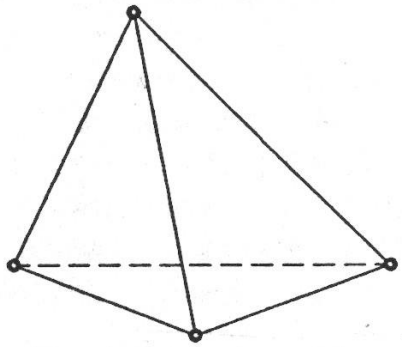
Jordanov teorem:

Svaka poliedarska sfera S u prostoru rastavlja prostor na točno dva područja koja zovemo ***unutrašnjost i vanjština*** *poliedarske sfere S.*

2.2.1.Tetraedar

Najjednostavniji poliedar je **tetraedar**. To je konveksna ljuska od četiri točke koje ne leže u istoj ravnini. Rub tetraedra čine četiri trokuta. Tetraedar se katkad zove i **3 -dimenzionalni simpleks**.[5] Tetraedar ima četiri vrha, šest bridova i četiri strane (trokuta), Tetraedar je pravilan ako su mu sve strane sukladni i jednakostranični trokuti (pa stoga i svi bridovi jednake duljine).

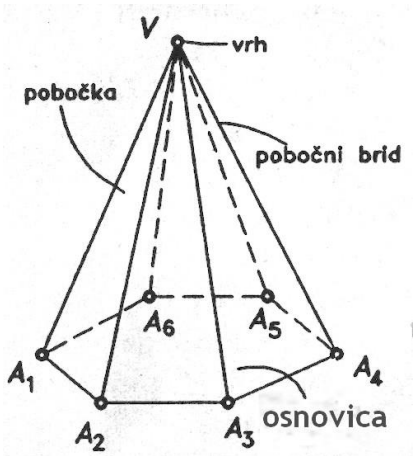
[5] Točka je 0-dimenzionalni simpleks, dužina 1-dimenzionalni simpleks, a trokut 2-dimenzionalni simpleks.



Trostrana piramida
(tetraedar)

2.2.2 Piramida

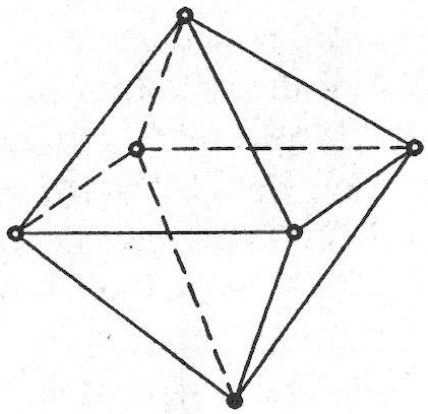
Piramida je konveksna ljuska (ravninskog) poligona i točke izvan ravnine. Taj poligon se zove baza ili osnovica piramide, a ta točka vrh piramide.
Visina piramide je udaljenost od vrha do baze. Ako je baza n – terokut, onda se piramida zove **n – strana piramida**.



šesterostrana piramida

Bipiramida (dvostruka piramida) se sastoji od baze i dva vrha s raznih strana ravnine osnovke. Svaka dužina koja spaja vrh bipiramide i neku točku baze se naziva **pobočni brid ili**

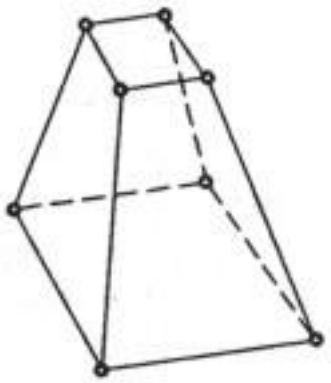
izvodnica piramide, a svaki trokut koji spaja dva susjedna vrha baze i vrh se naziva **pobočka ili pobočna strana piramide**. Unija pobočki se zove **plašt piramide**.



četverostrana bipiramida
(oktaedar)

Piramida je pravilna ako joj je baza pravilni poligon, a visina prolazi centrom baze.

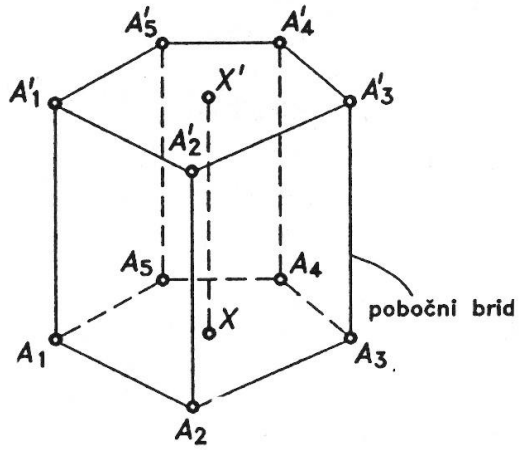
Krnja piramida je poliedar koji je presječen ravninom paralelnom s ravninom baze (osnovke). Udaljenost tih ravnina je **visina krnje piramide**.



krnja (četverostrana)
piramida

2.2.3.Prizma

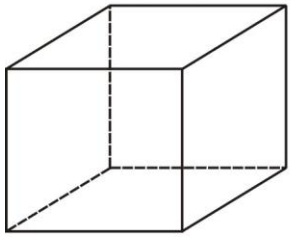
Prizma je poliedar koji je unija svih dužina koje spajaju pojedine točke nekog poligona s odgovarajućim točkama njegovog translata za neki vektor a koji ne leži u ravnini tog poligona. Taj poligon i njegov translat zovu se **baze (osnovke) prizme**, a dužine koje spajaju odgovarajuće vrhove zovu se **pobočni bridovi prizme**.



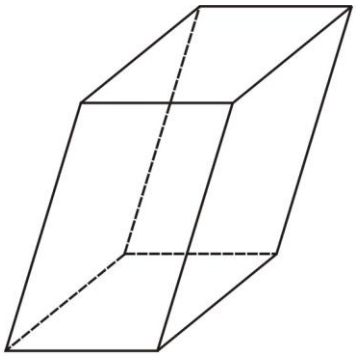
peterostrana prizma

Rubna ploha prizme sastoji se od dvaju paralelnih poligona – osnovaka i pobočki koje su paralelogrami.

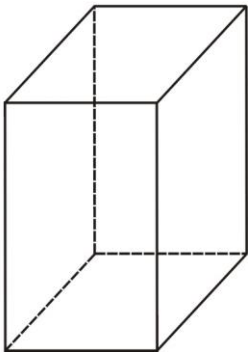
Plašt prizme je unija njenih pobočki. **Visina prizme** je udaljenost među ravninama baza. Dužina koja spaja dva vrha prizme a koji ne leže na istoj pobočki prizme zove se **dijagonala prizme**. Ako je baza n – terokut, prizma se zove **n – terostrana prizma**. Ako su pobočke (odnosno pobočni bridovi) okomiti na osnovku, prizma se zove **uspravna**. Prizma je pravilna, ako je uspravna, a osnovke su joj pravilni poligoni. Ako je baza četverostrane prizme paralelogram, onda se ona zove **paralepiped**. Ako je paralepiped uspravan, a baza mu je pravokutnik, onda se to zove **kvadar**, a ako je baza kvadra kvadrat, a duljina pobočnog brida jednaka duljini stranice osnovke, onda se takav kvadar zove **kocka** ili **kub**.



KOCKA

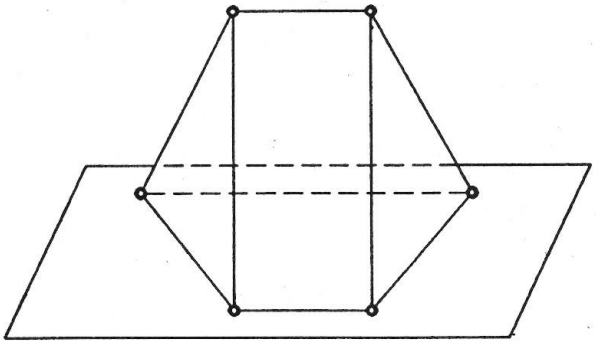


PARALEPIPED



KVADAR

Sažetak: Prizme, piramide i krnje piramide pripadaju klasi poliedara koji se zovu prizmatoidi. **Prizmatoid** je poliedar koji ima dvije strane – osnovke – koje mogu biti bilo koji poligoni, a leže u paralelnim ravninama, a sve ostale strane su trokuti ili četverokuti, a vrhovi svakog od njih leže u obje osnovke. Osnovka može biti i točka, tada je piramida, a ako je jedna osnovka četverokut, a druga dužina, onda je to tzv. **klin**.



klin

2.3. Teoremi i tvrdnje kod poliedara

2.3.1.Eulerov teorem

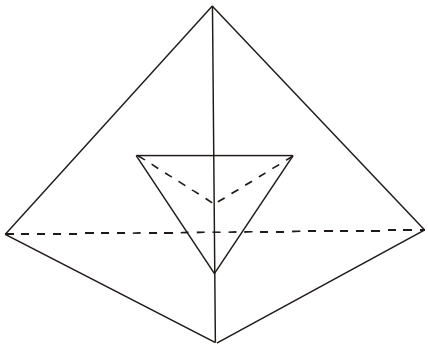
Ako sa *v* označimo broj vrhova, sa *b* broj bridova i sa *s* broj strana poliedra, onda je po Eulerovoj formuli

$$V-B+S=2$$

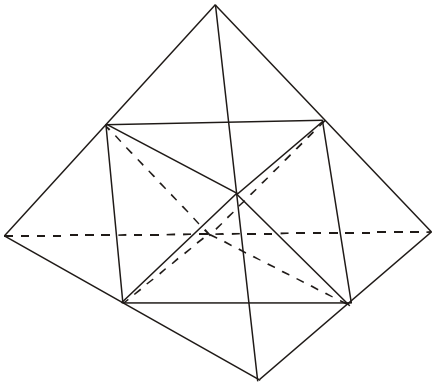
	V	***B***	***S***	***V-B+S=2***
TROSTRANA PIRAMIDA	*4*	*6*	*4*	*4-6+4=2*
KVADAR	*8*	*12*	*6*	*8-12+6=2*
n-TEROSTRANA PIRAMIDA	*n+1*	*2n*	*n+1*	*(n+1)-2n+(n+1)=2n+2-2n=2*

Tvrdnje

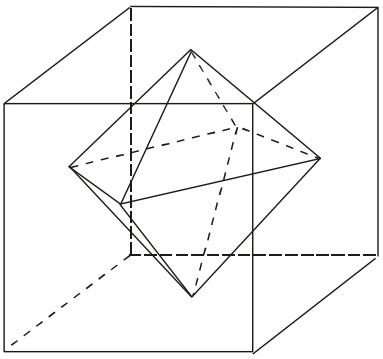
1. Težišta strana pravilnog tetraedra duljine brida *a* vrhovi su pravilnog tetraedra s bridom duljine *a/3*.



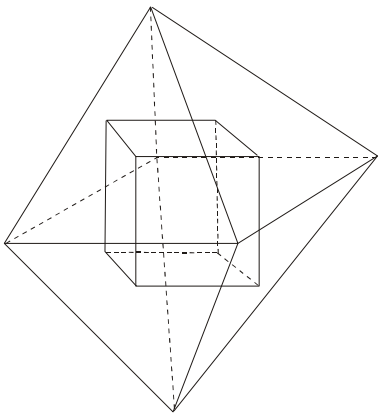
2. Polovišta bridova pravilnog tetraedra vrhovi su pravilnog oktaedra.



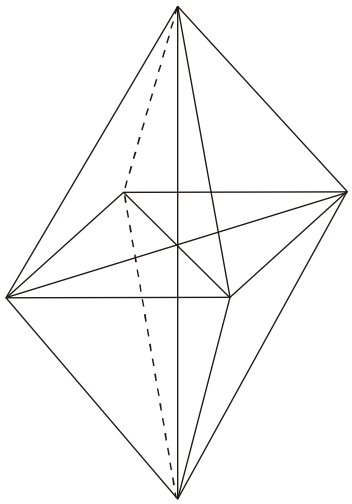
3. Središta strana kocke vrhovi su pravilnog oktaedra.



4. Središta strana pravilnog oktaedra vrhovi su kocke.



5. Sve prostorne dijagonale pravilnog oktaedra su međusobno jednake.



3. Pravilni (regularni) poliedri

Poliedar je pravilan ako su mu sve strane sukladni mnogokuti, a iz svakog vrha izlazi jednak broj bridova.

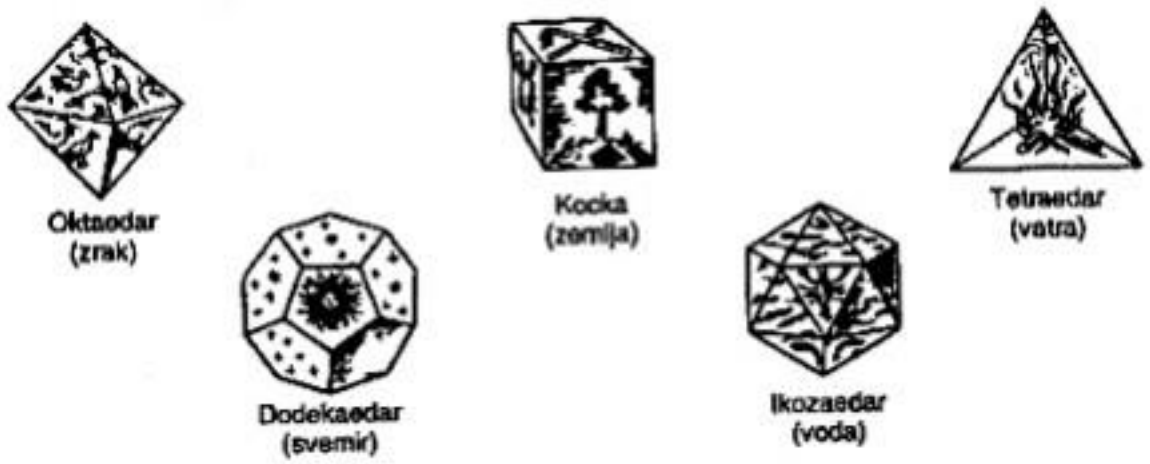
Brojevi strana, bridova i vrhova nekog poliedra nisu međusobno neovisni. Oni moraju zadovoljavati Eulerovu [6] formulu:

$$V + S = B + 2$$

gdje je V broj vrhova, S strana, a B bridova poliedra.

[6] **Leonhard Euler** (Basel, 15. travnja 1707.-Petersburg, 18. rujna 1783.), veliki je švicarski matematičar, fizičar i astronom. Utjecao je na razvoj cjelokupne matematike. 1726., po osnutku Peterbuške akademije znanosti, odlazi živjeti u Rusiju gdje ostaje do kraja života. Objavio je velik broj znanstvenih radova. Usprkos poodmakloj sljepoći, Euler je većinu radova napisao pri kraju života. Prvi je promatrao funkcije kompleksne varijable i povezao trigonometrijske s eksponencijalnim funkcijama. Uveo je analitičke metode u teoriju brojeva o kojoj je objavio 140 radova. Jedan je od tvoraca suvremene diferencijalne geometrije. Poznata je njegova tormula V-B+S=2, o odnosu broja vrhova, bridova i stranica u poliedru. Drži se začetnikom i teorije grafova.

Konveksni poliedar je pravilan, ako su mu sve strane pravilni poligoni, recimo p-terokuti, a u svakom vrhu se sastaje jednako mnogo bridova,recimo q, čiji drugi krajevi čine pravilan q-terokut. Tada govorimo o {p,q}- poliedru, gdje je p broj stranica poligona (likovi koji čine poliedar, $p \geq 3$), a q je broj bridova koji se sastaju u jednom vrhu.
Pitanja o poliedrima zanimala su ljude još od davnina. Već u staroj Grčkoj, bili su poznati pravilni poliedri kojima su Grci pridavali nadnaravna svojstva, pripisivajući im simboliku četiriju prapočetaka.



Postoji samo pet pravilnih poliedara. To su (pravilni) **tetraedar**, **heksaedar** (kocka), **oktaedar dodekaedar** i **ikosaedar**. To su tzv.Platonova[7] tijela.

Dokaz: Koji sve brojevi p i q dolaze u obzir, da bi {p,q} poliedar bio pravilan ? Očito je da su p i q ≥ 3. Svaki brid poliedra ima dva kraja, pa krajeva svih bridova ima 2b. S druge strane, q krajeva bridova ulaze u svaki od v vrhova, pa ima qv krajeva bridova. Dakle qv = 2b. Nadalje, svaki brid poliedra je brid točno dviju strana, pa ima 2b strana bridova. S druge strane, svaka od s strana je omeđena sa p bridova, pa ima ps strana bridova. Dakle ps = 2b.

[7] **Platon** (427 –347 pr.Kr.) starogrčki filozof – idealist, učenik Sokrata, a učitelj Aristotelov.

$$qv = 2b \Rightarrow v = \frac{2}{q}b$$

$$ps = 2b \Rightarrow s = \frac{2}{p}b$$

$$v - b + s = 2$$

$$2 = \frac{2}{q}b - b + \frac{2}{p}b$$

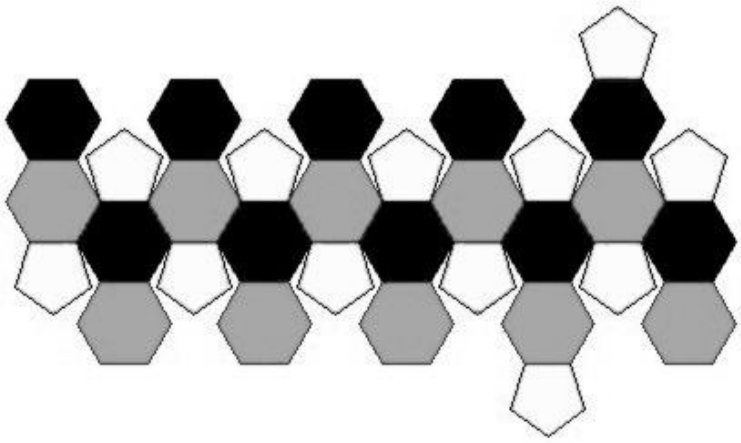
$$2 = \frac{2pb - pbq + 2bq}{pq}$$

$$2 = b\frac{2p + 2q - pq}{pq}$$

$$2p + 2q - pq > 0 / \cdot (-1)$$

$$pq - 2p - 2q + 4 < 4$$

$$(p-2)(q-2) < 4$$



mreža "buba mare"

Zbog p – 2 , q – 2 ≥ 1, jedine mogućnosti za { p, q }su:

{3,3},{3,4},{4,3},{3,5},{5,3}

{3,3}- tetraedar

{3,4}- oktaedar

{4,3}- kocka

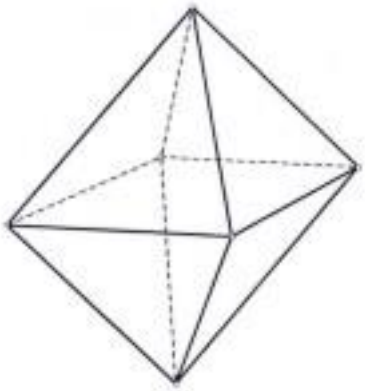
{3,5}- ikosaedar

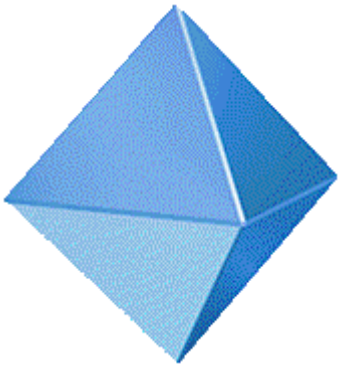
{5,3}- dodekaedar

3.1. Primjeri pravilnih poliedara

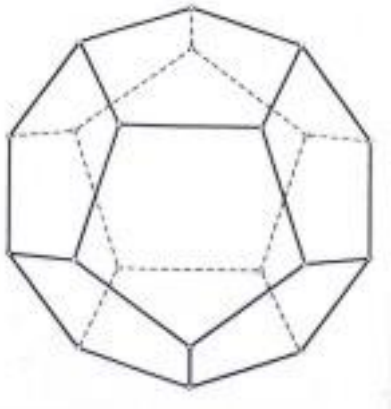
Slika 2.5. Pravilan tetraedar pravilan je poliedar sa stranama koje su sukladni jednakostranični trokuti. Ima četiri strane, šest (jednako dugih) bridova i četiri vrha. Ime mu dolazi od grčke riječi tetra-četiri.

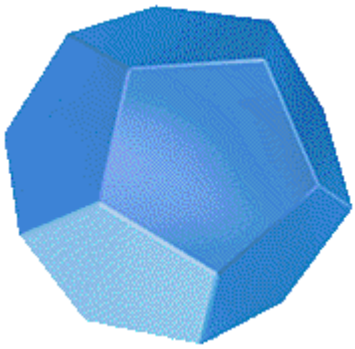
Slika2.6. Pravilan heksaedar (kocka) pravilan je poliedar sa stranama koje su sukladni kvadrati. Ima šest strana, dvanaest (jednako dugih) bridova i osam vrhova. Ime mu dolazi od grčke riječi heksa-šest.



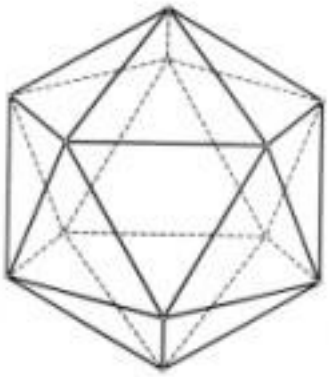


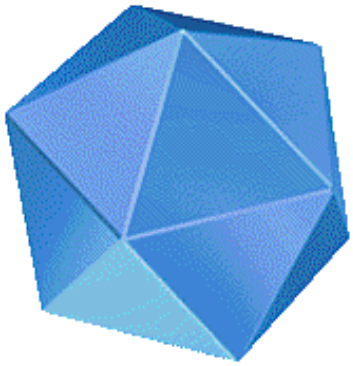
Slika 2.7. Pravilan oktaedar pravilan je poliedar sa stranama koje su sukladni jednakostranični trokuti. Ima osam strana, dvanaest (jednako dugih) bridova i osam vrhova. Ime mu dolazi od grčke riječi okto-osam.





Slika 2.8. Pravilan dodekaedar pravilan je poliedar sa stranama koje su sukladni pravilni peterokuti. Ima dvanaest strana, trideset (jednako dugih) bridova i dvadeset vrhova. Ime mu dolazi od grčke riječi dodeka-dvanaest.





Slika 2.9. Pravilan ikosaedar pravilan je poliedar sa stranama koje su sukladni jednakostranični trokuti. Ima dvadeset strana, trideset (jednako dugih) bridova i dvanaest vrhova. Ime mu dolazi od grčke riječi ikosi-dvadeset.

3.2. Polupravilni poliedri

Eulerova formula dolazi do izražaja već i u svakodnevnom životu. Tako npr. znamo da je nogometna lopta "buba mara", prekrivena pravilnim peterokutima i šesterokutima i to tako da su oko svakog (crnog) peterokuta sami (bijeli) šesterokuti,a svaki šesterokut graniči (preko svakog svog drugog vrha) s tri peterokuta. Moguće je i postaviti pitanje koliko ima peterokuta, a koliko šesterokuta na "buba mari" ?

Ako sa x označima broj petrokuta, a sa y broj šesterokuta, odmah uočavamo da je broj svih vrhova na pripadnom konveksnom poliedru jednak 5x, a da je broj bridova jednak 5x + 3y/2 te da je broj strana jednak x + y.

Eulerova formula tada odmah daje 2x = y+4. S druge strane, bridova ima 3y + 3y/2, pa je 5x + 3y/2 = 3y + 3y/2, tj. 5x = 3y. Iz ove dvije jednadžbe, tada dobivamo x = 12, y =20.

x – broj petrokuta

y – broj šesterokuta

V – B + S = 2

$$B = 5 \cdot x + \frac{3}{2} \cdot y$$

S = x + y

$$V - B + S = 2$$

$$5x - \left(5x + \frac{3}{2} y \right) + x + y = 2$$

$$5x - 5x - \frac{3}{2} y + x + y = 2 / \cdot 2$$

$$-3y + 2x + 2y = 4$$

$$2x - y = 4$$

$$2x = 4 + y$$

$$5x + \frac{3}{2} y = 3y + \frac{3}{2} y$$

$$5x = 3y + \frac{3}{2} y - \frac{3}{2} y$$

$$5x = 3y$$

$$5x = 3y \Rightarrow x = \frac{3}{5} y$$

$$2x = y + 4$$

$$2 \cdot \frac{3}{5} y = y + 4$$

$$\frac{6}{5} y = y + 4 / \cdot 5$$

$$6y = 5y + 20$$

$$6y - 5y = 20$$

$$y = 20$$

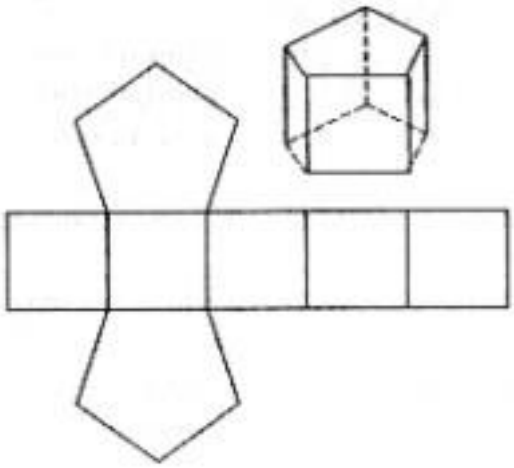
$$x = \frac{3}{5} y$$

$$x = \frac{3}{5} \cdot 20$$

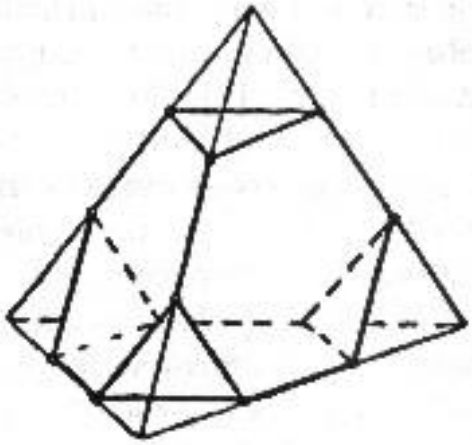
$$x = 12$$

Također imamo i različite vrste polupravilnih poliedara. Možemo ih podijeliti na:

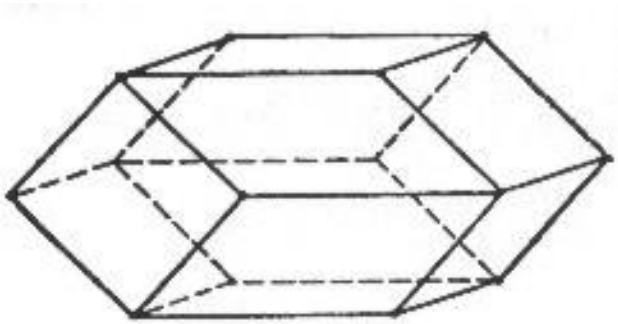
a) **jednakokutne – polupravilne ili Arhimedove poliedre** – to su poliedri koji imaju sve prostorne kutove jednake (ali ne nužno pravilne), a sve strane su pravilni poligoni, koji nisu nužno jednaki (kongruentni). Najjednostavnije su tzv. **Arhimedove prizme**, tj. pravilne n-strane prizme s kvadratima kao pobočkama.



Drugi primjer Arhimedovog poliedra dobijemo ako kod svakog vrha pravilnog tetraedra brida a odsiječemo pravilni tetraedar brida a/3



b) **jednakostrani – polupravilni poliedri –** to su poliedri koji imaju kongruentne strane (ali ne nužno pravilne) i sve prostorne kutove pravilne (ali ne nužno međusobno jednake). Takvi su npr.pravilne bipiramide. Drugi je primjer rombski dodekaedar, koji ima 12 sukladnih rombova za strane, a 14 pravilnih prostornih kutova od kojih 6 četverobrida i 8 trobrida.



Rombski dodekaedar

Kristale također možemo pribrojiti poliedrima. Razlikujemo pravilne i polupravilne kristale. U kristalografiji polupravilnih poliedara susrećemo tzv. **izoedre** npr. kristal kuprita (Cu_2O) , ili tzv. izoedar koji je omeđen s 24 kongruentna nepravilna petrokuta.

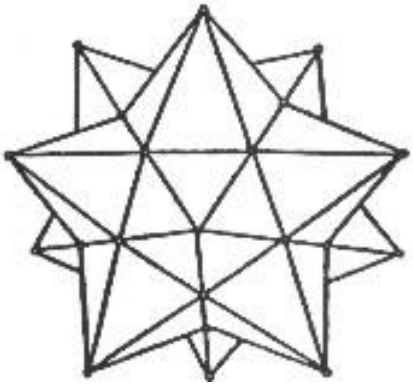
izoedar (kristal kuprita)

Osim pravilnih konveksnih poliedara, promatraju se i pravilni zvjezdasti poliedri. Još je J.Kepler [8] našao dva tipa: **mali i veliki zvjezdasti dodekaedar.**
A.Cauchy [9] je mnogo kasnije našao još dva tipa i dokazao da su to svi.

---

[8] Johann Kepler – njemački astronom (27.12.1571 – 15.11.1630) ,matematičar,fizičar,čuven po objavljivanju značajnih znanstvenih otkrića na navedenim područjima

[9] Cauchy, Augustin Luis (Paris 21.8.1789 – Sceaux, 23.5.1857) veliki francuski matematičar zaslužan za strogo zasnivanje matematičke analize pomoću limesa. Postigao važna dostignuća u mnogim područjima matematike.Po njemu se nazivaju mnogi pojmovi i teoremi.

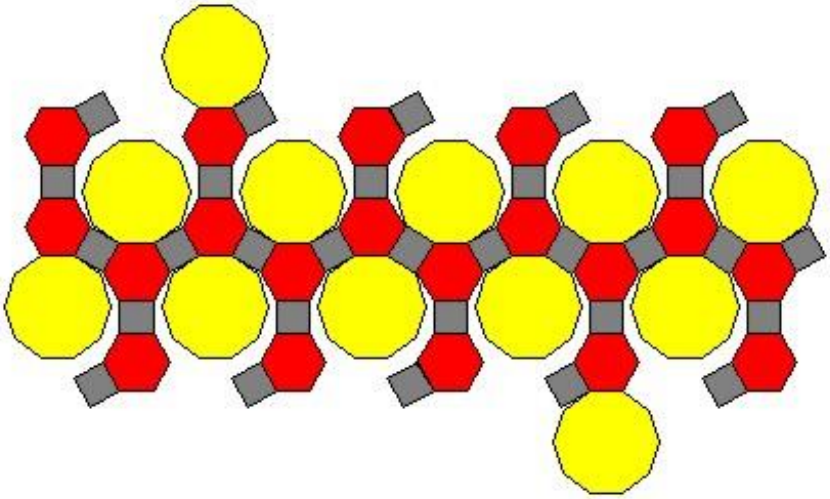


mali zvjezdasti dodekaedar

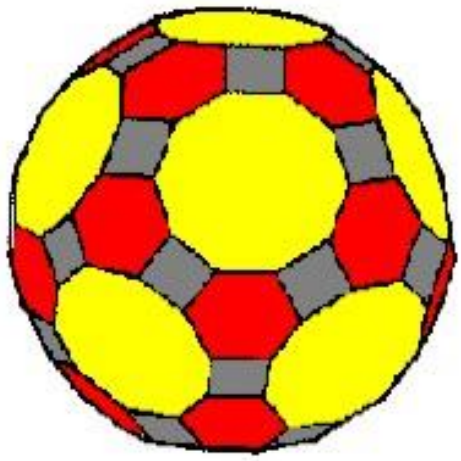
3.2.1. Lopte

Ikosododekaedar

Sastavljen je od 62 segmenta i to: Od 12 deseterokuta, 20 šesterokuta i 30 kvadrata.



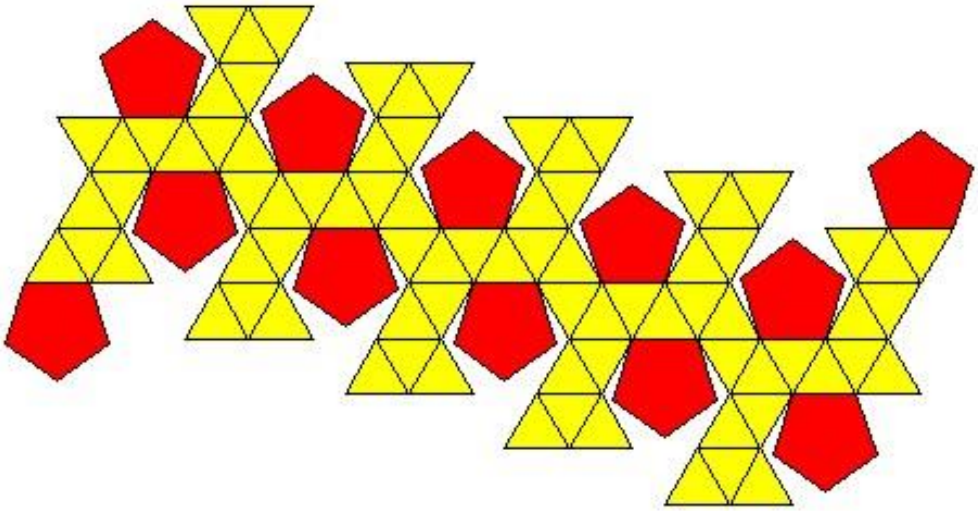
mreža ikosododekaedra



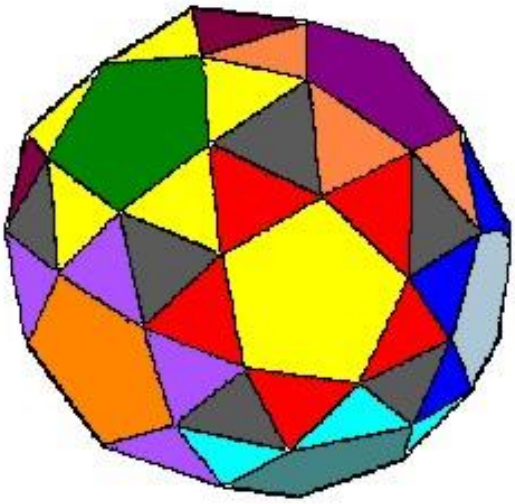
ikosododekaedar

Plosnati dodekaedar

Sastavljen je od 12 peterokuta i 80 jednakostraničnih trokuta.



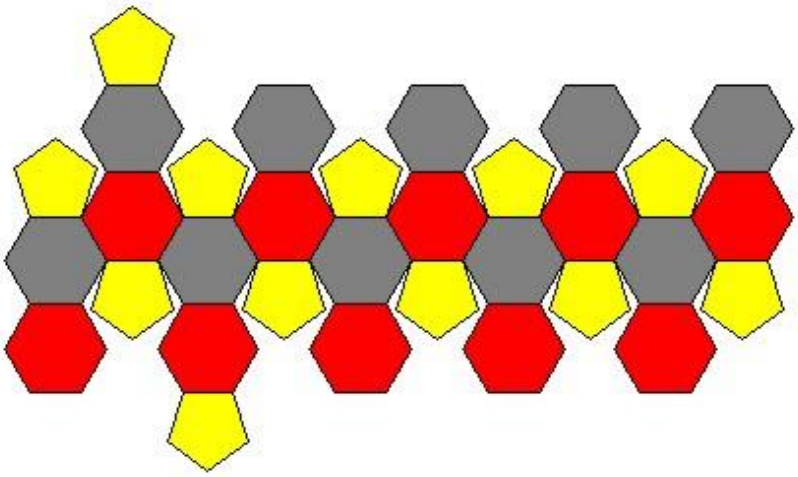
mreža plosnatog dodekaedra



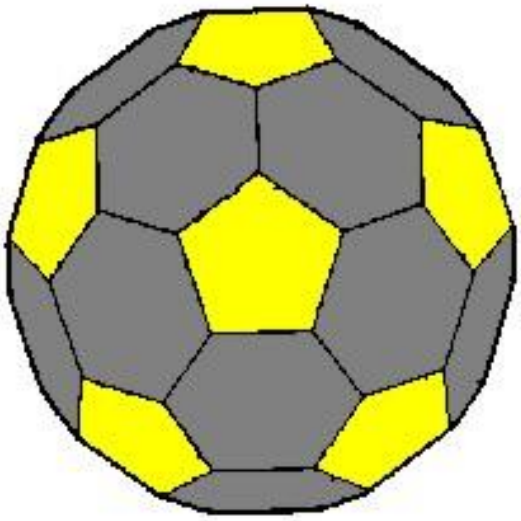
plosnati dodekaedar

Krnji ikosaedar

Sastavljen je od 20 šesterokuta i 12 peterokuta. U crno-bijeloj varijanti ovaj ikosaedar poznatiji je pod popularnim nazivom nogometna lopta.



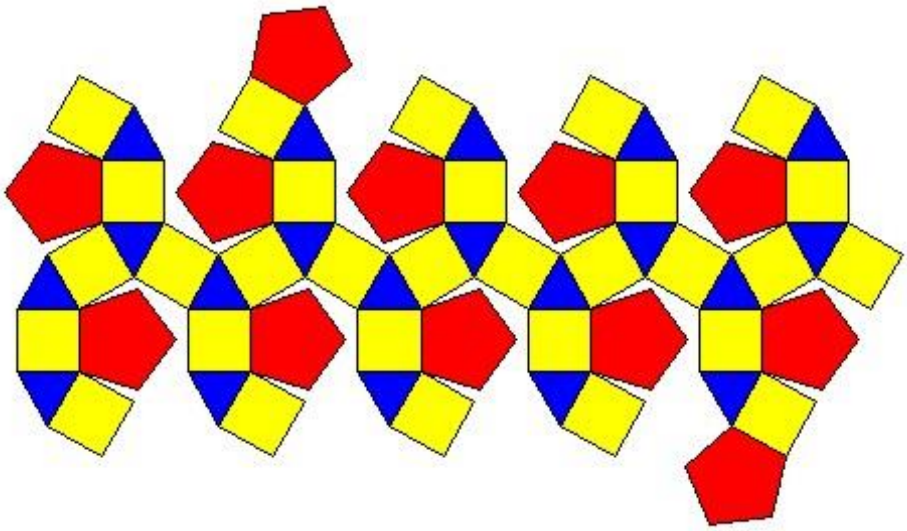
mreža krnjeg ikosaedra



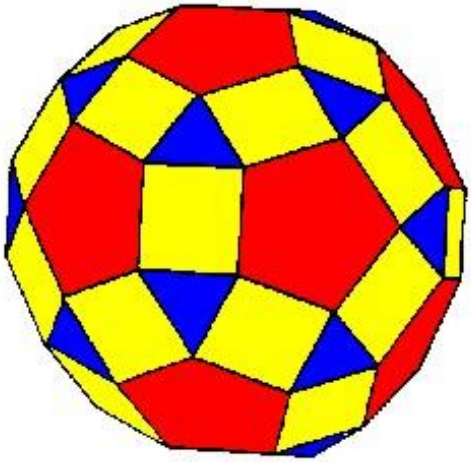
krnji ikosaedar – nogometna lopta

Romboikosododekaedar

Sastavljen je od 20 jednakostraničnih trokuta 30 kvadrata i 12 peterokuta.



mreža romboikosododekaedra

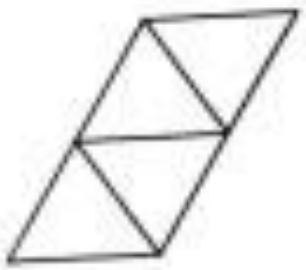


romboikosododekaedar

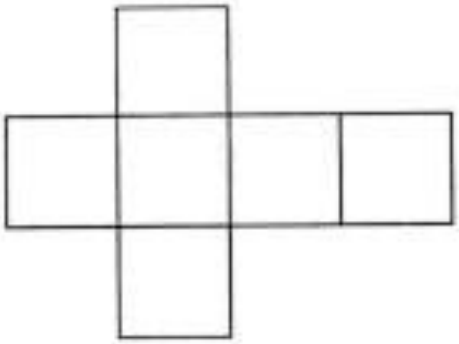
4. Prilog

4.1. Mreže pravilnih poliedara

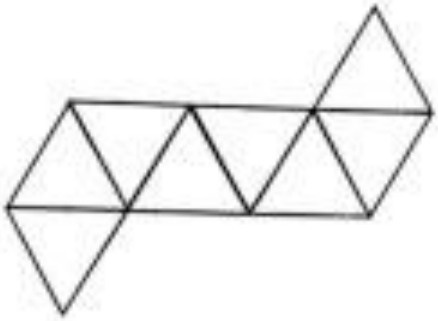
Tetraedar



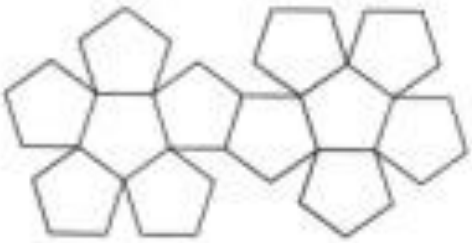
Heksaedar (kocka)



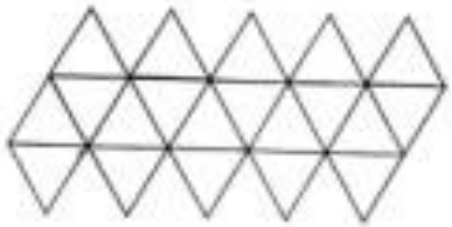
Oktaedar



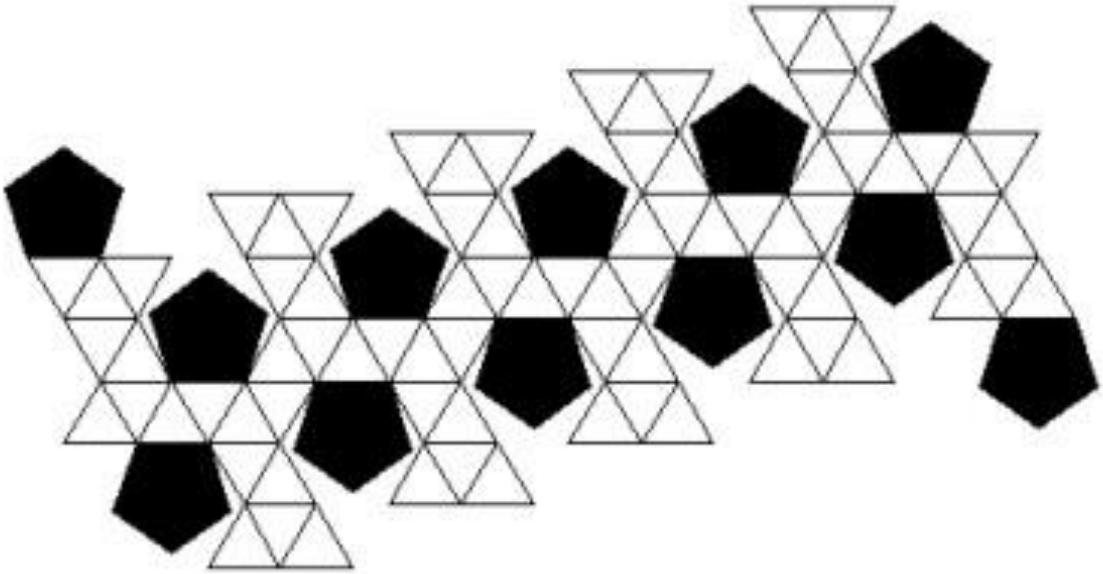
Dodekaedar



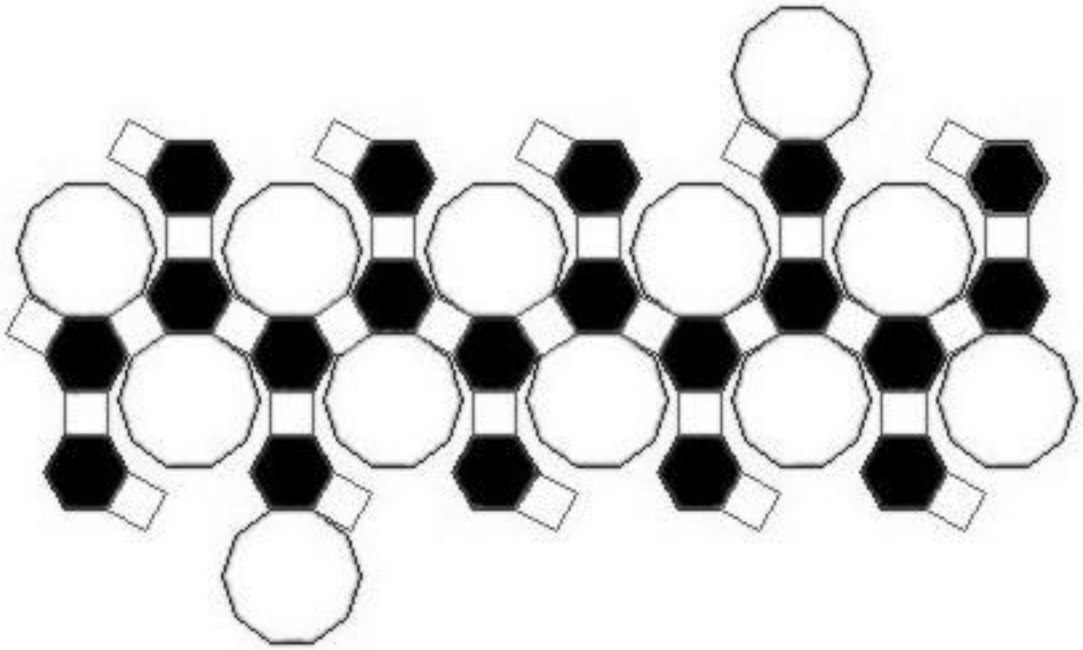
Ikosaedar



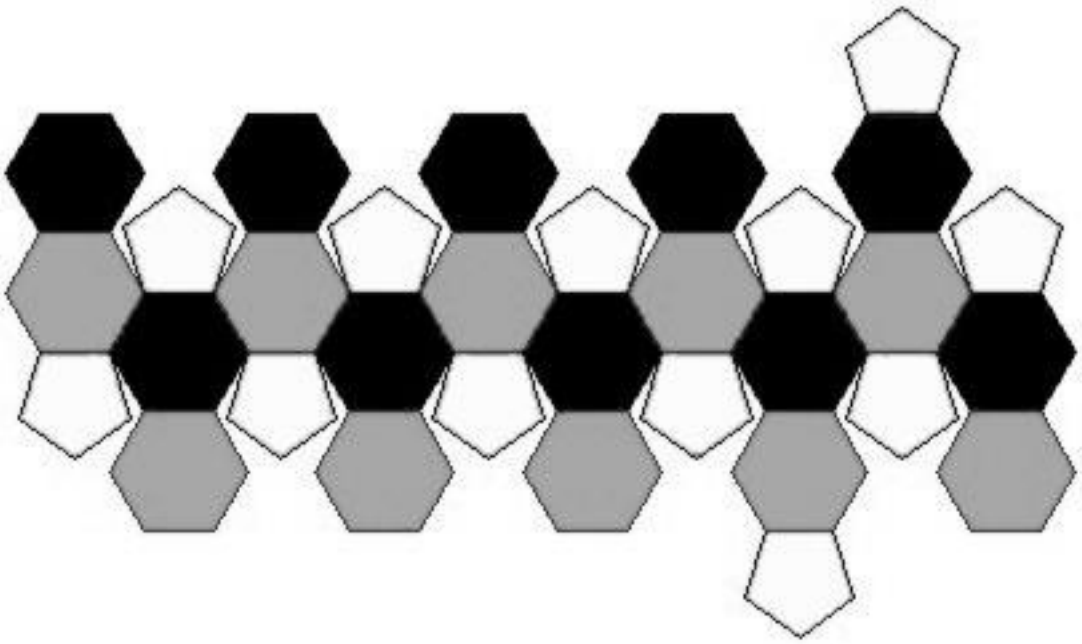
4.2. Mreže polupravilnih poliedara



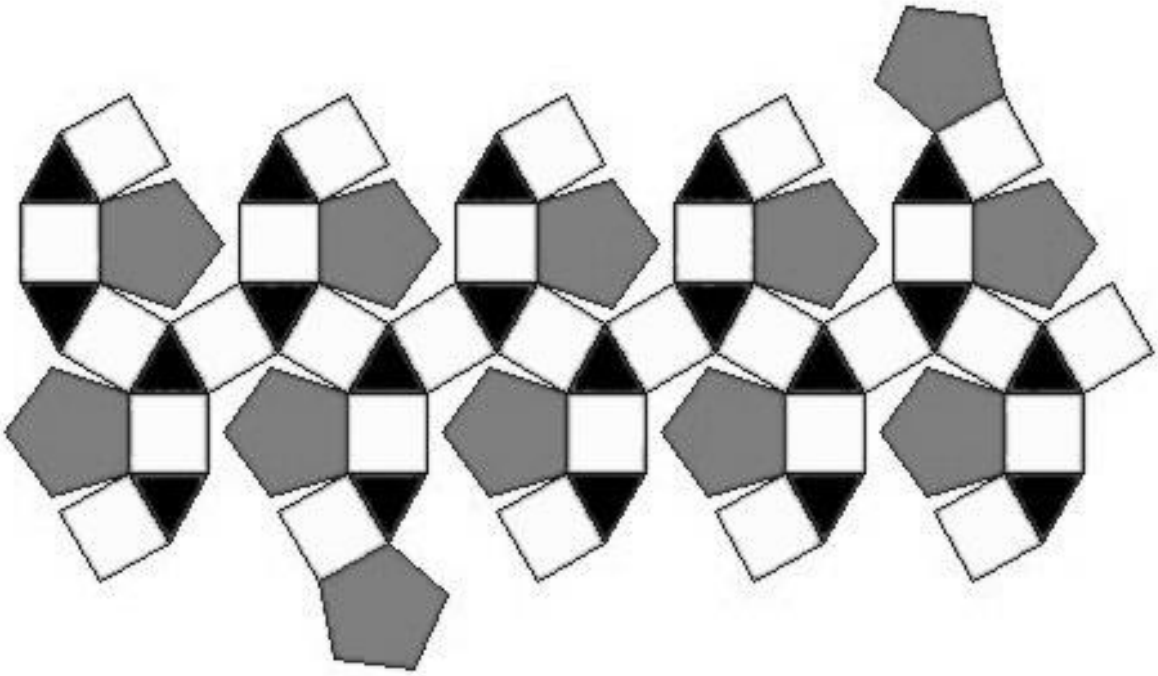
mreža plosnatog dodekaedra



mreža ikosododekaedra



mreža krnjeg ikosaedra



mreža romboikosododekaedra

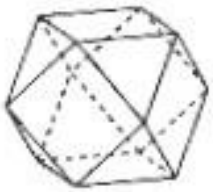
4.3.Arhimedova tijela

Starogrčki matematičar **Papo** iz Aleksandrije (druga pol.III st.pr.Kr.) napisao je djelo od osam knjiga pod nazivom "Zbornik radova". U njemu je sustavno skupio matematičko znanje stare Grčke. U petoj knjizi upisao je 13 Arhimedovih tijela. Tek sredinom XX st. nađeno je 14. Arhimedovo tijelo. Našlo ga je više matematičara, a među njima i hrvatski matematičar **Stanko Bilinski**.[10]

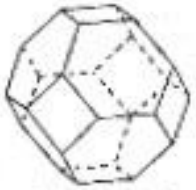
Polupravilni poliedar jest konveksni poliedar omeđen pravilnim mnogokutima,a kutovi među stranama su jednaki. (kongruentni). Dijele se na tri skupine: *Pravilne prizme, pravilne antiprizme i Arhimedova tijela*. Kombiniranjem dvjema, zatim trima vrstama pravilnih mnogokuta dobivamo Arhimedova tijela.

[10] Stanko Bilinski – matematičar, rođen 1909.Profesor na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Objavio je niz radova iz geometrije.

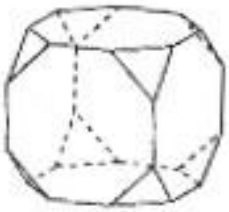
okrnjeni tetraedar



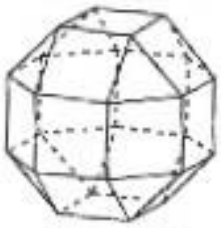
kubooktaedar



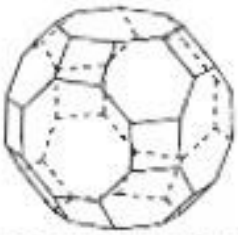
okrnjeni oktaedar



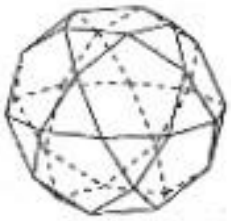
okrnjena kocka



rombokubooktaedar

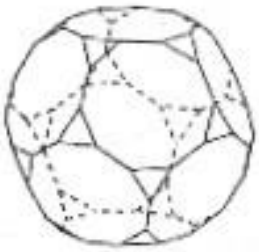


veliki rombokubooktaedar



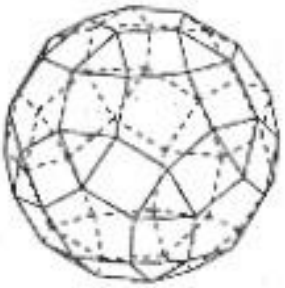
ikozododekaedar

okrnjeni ikozaedar

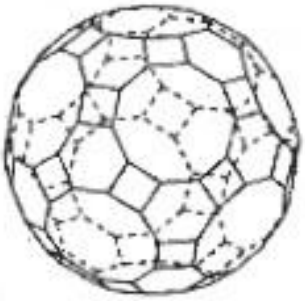


okrnjeni dodekaedar

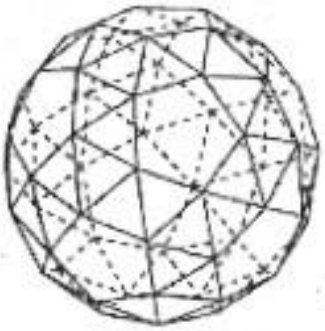
zaobljena kocka



rombokozododekaedar



veliki rombokozododekaedar

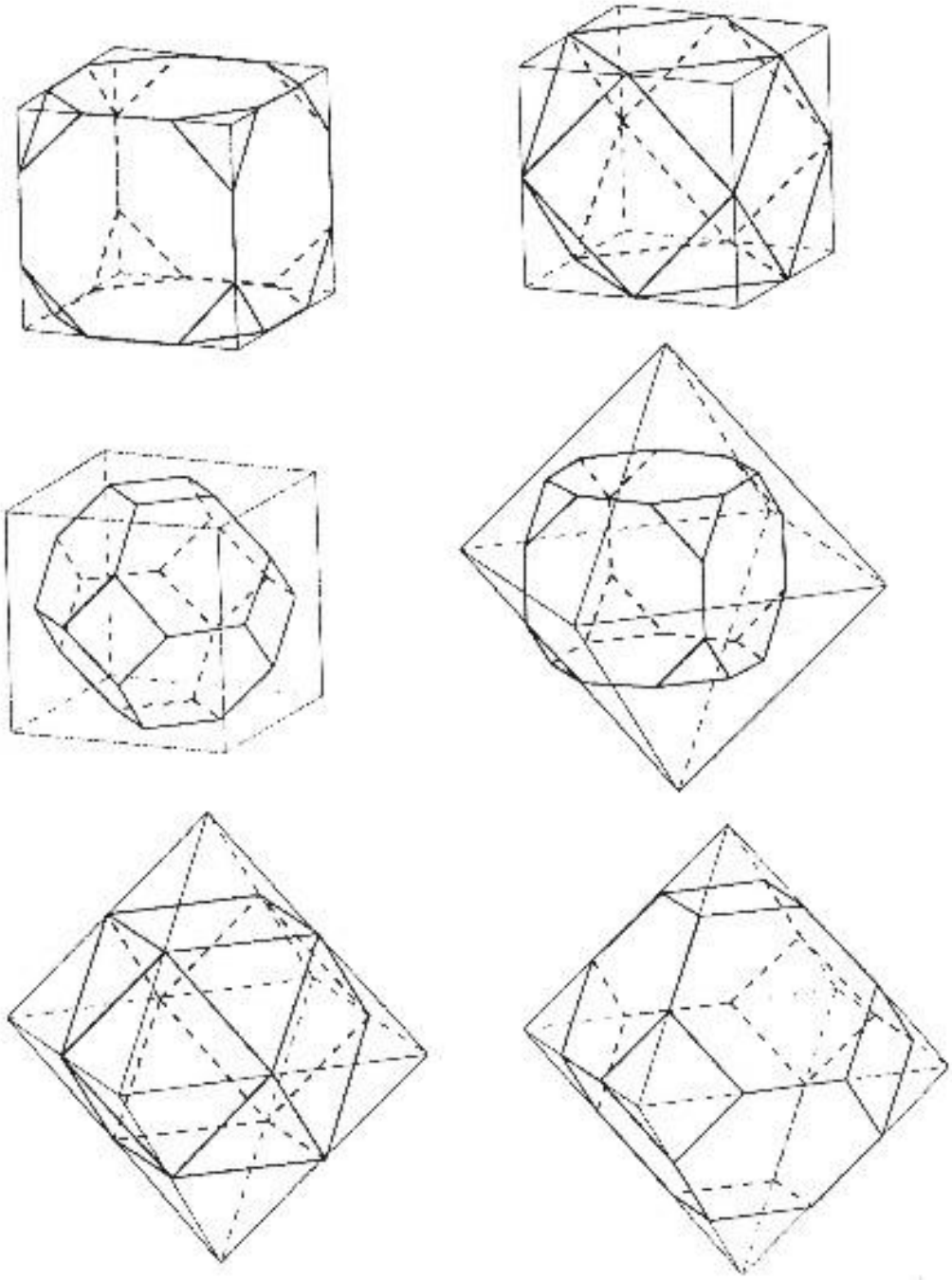


zaobljeni dodekaedar

U tablici, koja slijedi navedena je vrsta i broj pravilnih mnogokuta, te ukupan broj strana kojima su omeđena Arhimedova tijela.

Ime:	broj trokuta:	broj kvadrata:	broj 5-erokuta:	broj 6-erokuta:	broj 8-erokuta:	broj 10-erokuta:	Ukupno:
okrnjeni tetraedar	4			4			8
kubooktaedar	8	6					14
okrnjeni oktaedar		6		8			14
okrnjena kocka	8				6		14
rombokubooktaedar	8	18					26
veliki rombokubooktaedar		12		8	6		26
ikosododekaedar	20		12				32
okrnjeni ikosadar			12	20			32
okrnjeni dodekaedar	20					12	32
zaobljena kocka	32	6					38
romboikosododekaedar	20	30	12				62
veliki rombokubododekaedar		30		20		12	62
zaobljeni dodekaedar	80		12				92

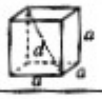
Ako tim tijelima u vrhovima odsiječemo piramide, čije su baze pravilni mnogokuti,a pri tom zasiječeni mnogokut bude opet novi pravilni mnogokut, dobit ćemo okrnjena Platonova tijela. Zasijecanjem kocke i oktaedra mogu nastati i tijela prikazana na slici:



Modeli Arhimedovih tijela danas nalaze različitu primjenu. Okrnjenim ikosaedrom objašnjava se molekula *fulerena C 60.*

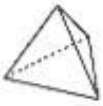
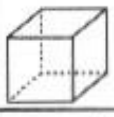
4.4. Kratki pregled formula

Važniji poliedri

Tijelo	Crtež	Volumen	Oplošje	Napomena
Kocka		$V = a^3$	$S = 6a^2$	$d = a\sqrt{3}$
Kvadar		$V = a\ b\ c$	$S = 2(ab + bc + ca)$	$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
Prizma		$V = h \cdot S_p$	$S_b = h \cdot L$ $S = 2S_p + S_b$	Ako su bridovi okomiti na osnovku, prizma se naziva uspravnom; tada je $h = l$
Piramida		$V = \frac{1}{3} S_p\ h$	$S = S_p + S_b$	Osnovka: poligon, pobočje: trokuti sa zajedničkim vrhom
Pravilna piramida		$V = \frac{1}{3} S_p\ h$	$S_b = \frac{n}{2}\ a\ l$	Osnovka: pravilni poligon stranice a
Krnja piramida		$V = \frac{h}{3}(S_{p_1} + S_{p_2} + \sqrt{S_{p_1} S_{p_2}})$	$S = S_b + S_{p_1} + S_{p_2}$	Vrijedi odnos: $S_{p_1} : S_{p_2} = (h + x)^2 : x^2$ osnovke u paralelnim ravninama
Prizmatoid		$V = \frac{h}{6}(S_{p_1} + 4S_m + S_{p_2})$	$S = S_b + S_{p_1} + S_{p_2}$	Osnovke poligona u paralelnim ravninama; S_m – površina presjeka na polovini visine h

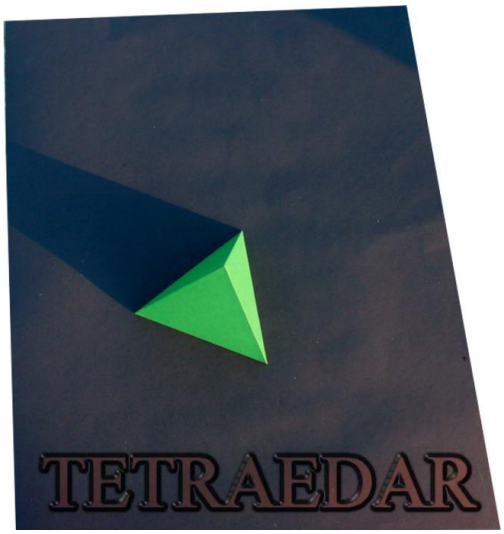
V – volumen; S – oplošje; S_b – površina pobočja; S_p – površina osnovke; h – visina; x – visina dopunjka krnje piramide; S_{p_1}, S_{p_2} – površine gornje i donje osnovke piramide; l – osnovni brid; L – opseg osnovke; d – prostorna dijagonala.

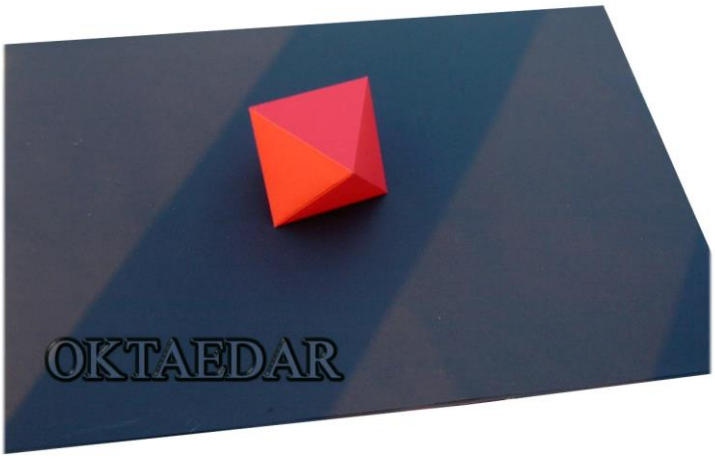
Pravilni poliedri (platonska tijela)

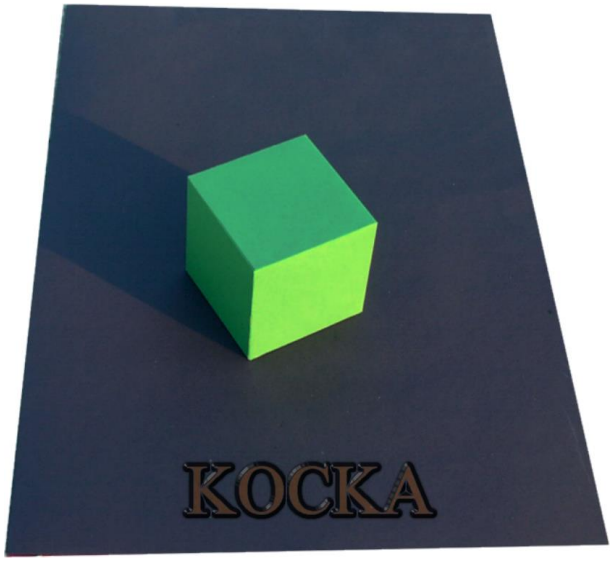
	Tetraedar	Heksaedar (kocka)	Oktaedar	Dodekaedar	Ikozaedar
Pobočke	4 trokuta	6 kvadrata	8 trokuta	12 peterokuta	20 trokuta
Bridovi	6	12	12	30	30
Vrhovi	4	8	6	20	12
Crtež					
Oplošje S	$S = \sqrt{3}\ a^2$	$S = 6\ a^2$	$S = 2\sqrt{3}\ a^2$	$S = 3\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}a^2$	$S = 5\sqrt{3}\ a^2$
Volumen	$V = \frac{\sqrt{2}}{12}\ a^3$	$V = a^3$	$V = \frac{\sqrt{2}}{3}\ a^3$	$V = \sqrt{15 + 7\sqrt{5}}\ \frac{a^3}{4}$	$V = \frac{5}{12}\sqrt{3 + \sqrt{5}}\ a^3$
φ	$70^\circ 33'$	90°	$109^\circ 28'$	$116^\circ 34'$	$138^\circ 11'$

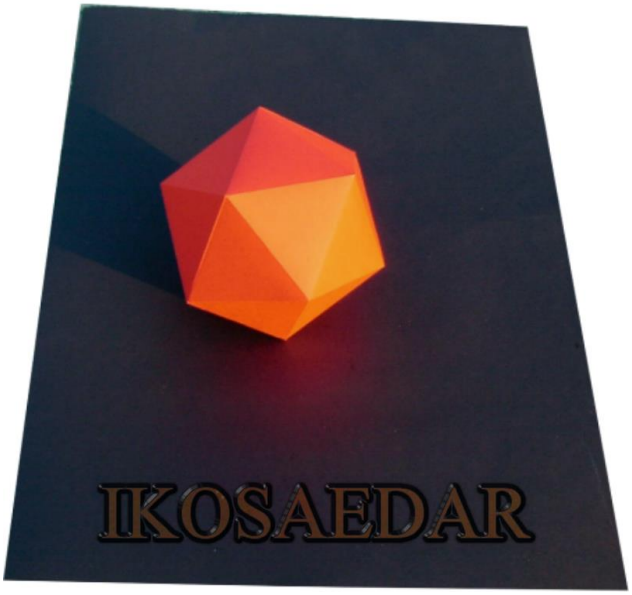
φ – kut između pobočki sa zajedničkim bridom; ostale oznake vidi na prethodnoj stranici.

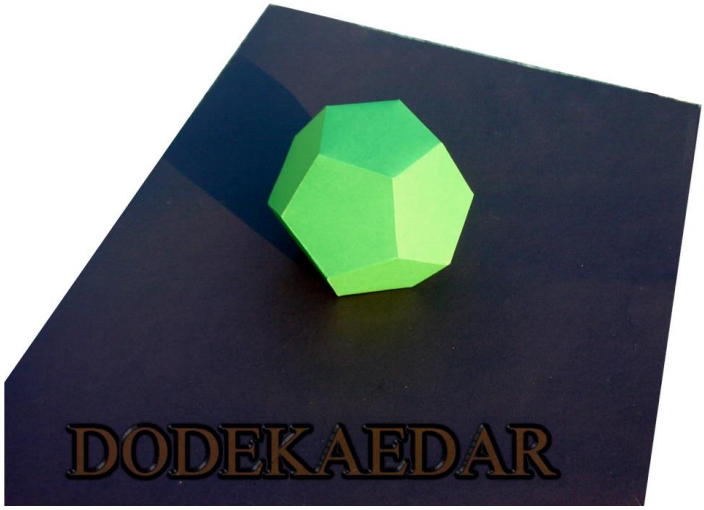
4.5. Modeli pravilnih poliedara (fotografije)






KOCKA

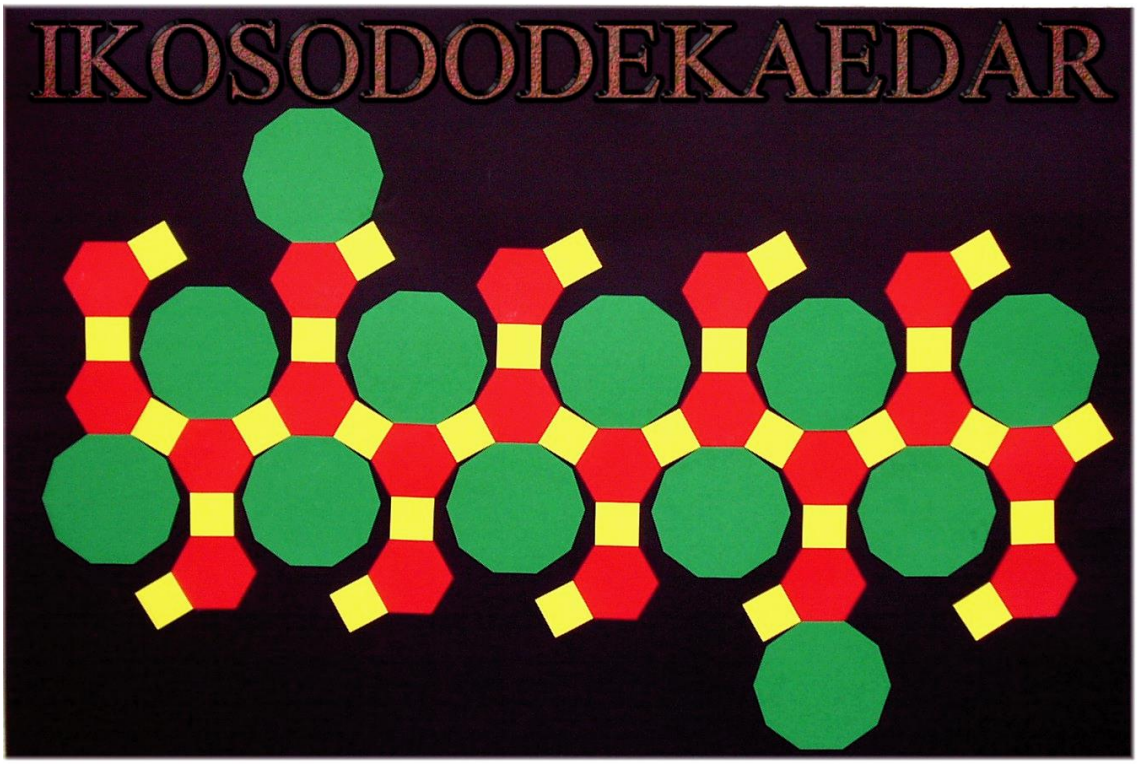

IKOSAEDAR

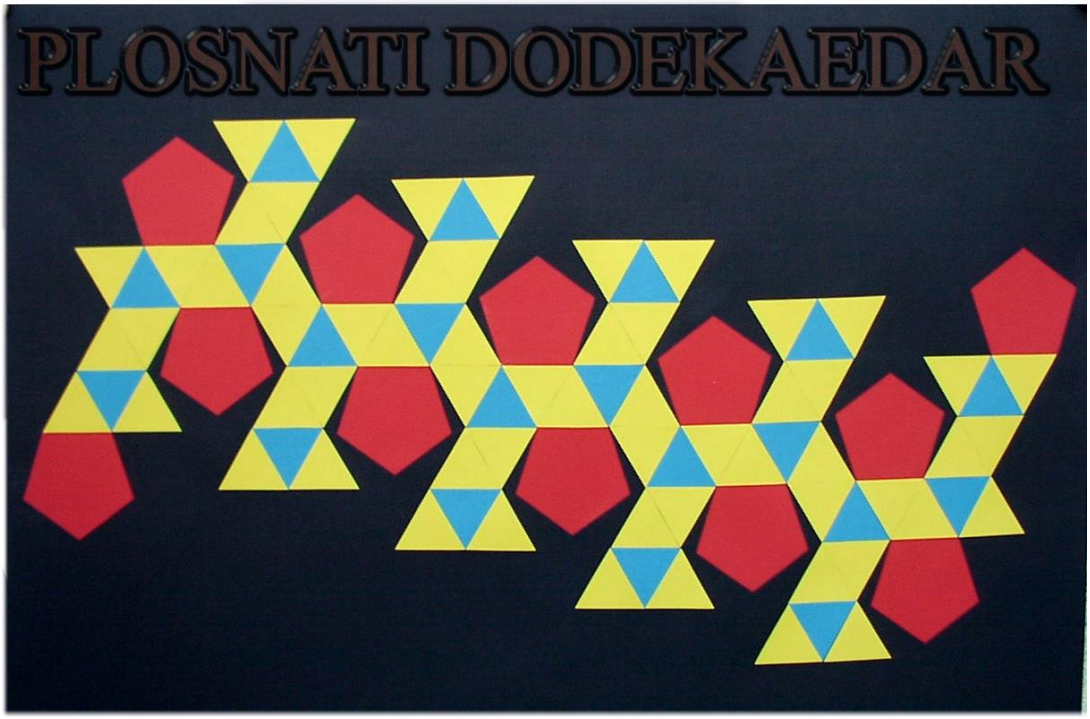


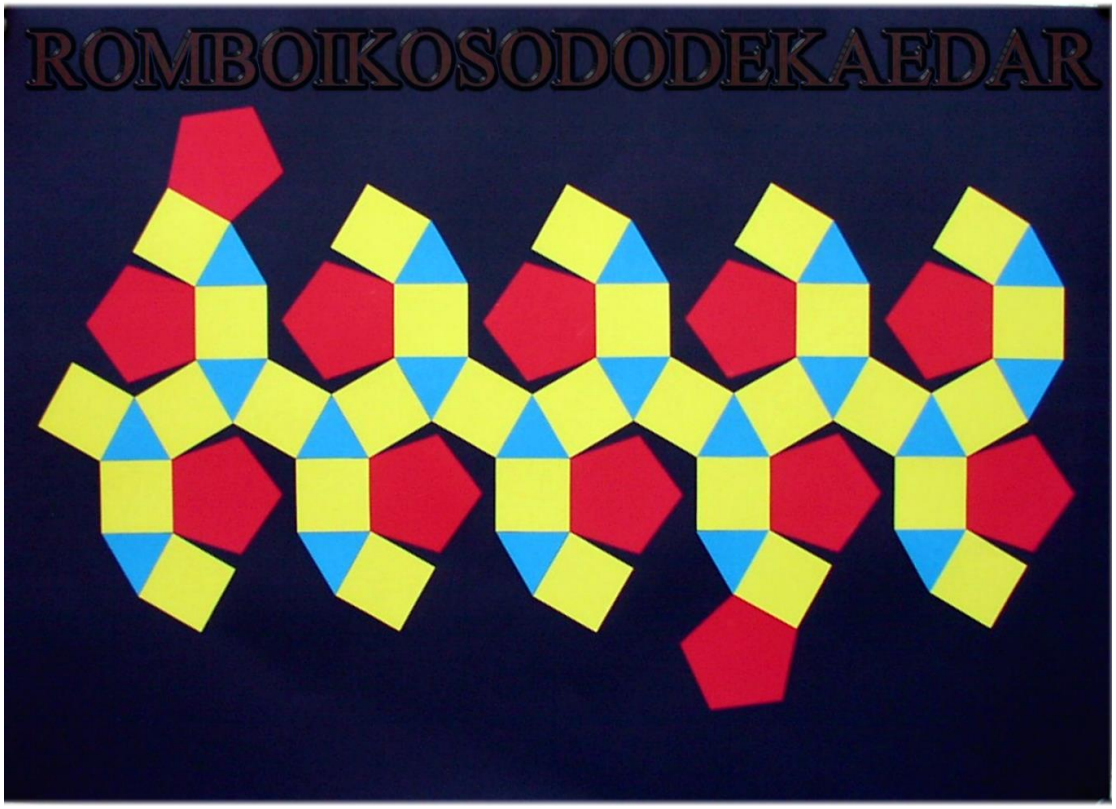
4.6.Mreže i modeli lopti (fotografije)


KRNJI
IKOSAEDAR


KRNJI
IKOSAEDAR


IKOSODODEKAEDAR


PLOSNATI DODEKAEDAR


ROMBOIKOSODODEKAEDAR


POLIEDRI

Popis literature:

1. Dakić Branimir, *Matematika 2*, zbirka zadataka za drugi razred gimnazije, Element, Zagreb, 1999.
2. Elezović Neven, *Matematika 2*, udžbenik za drugi razred gimnazije, Element, Zagreb, 1999.
3. S. Kurepa, A. Kurepa, J. Hrnčević, *Matematika 2*, udžbenik i zbirka zadataka s riješenjima za drugi razred prirodoslovno-matematičke gimnazije, Školska knjiga, Zagreb, 2000.
4. S. Kurepa, A. Kurepa, *Matematika*, za drugi razred srednjeg usmjerenog obrazovanja, Školska knjiga, Zagreb, 1988.
5.Prof.dr.Boris Pavković, prof.dr.Darko Veljan, *Elementarna matematika 2*, Školska knjiga,Zagreb,1995.
6.Witold Mizerski, *Formule i tablice Matematika, fizika, astronomija, kemija,* Element, Zagreb,2000.
7.Časopis za mlade matematičare *Matka,* br.36, lipanj 2001.
8.Internet,www.Sviluppo poliedri regolari.htm